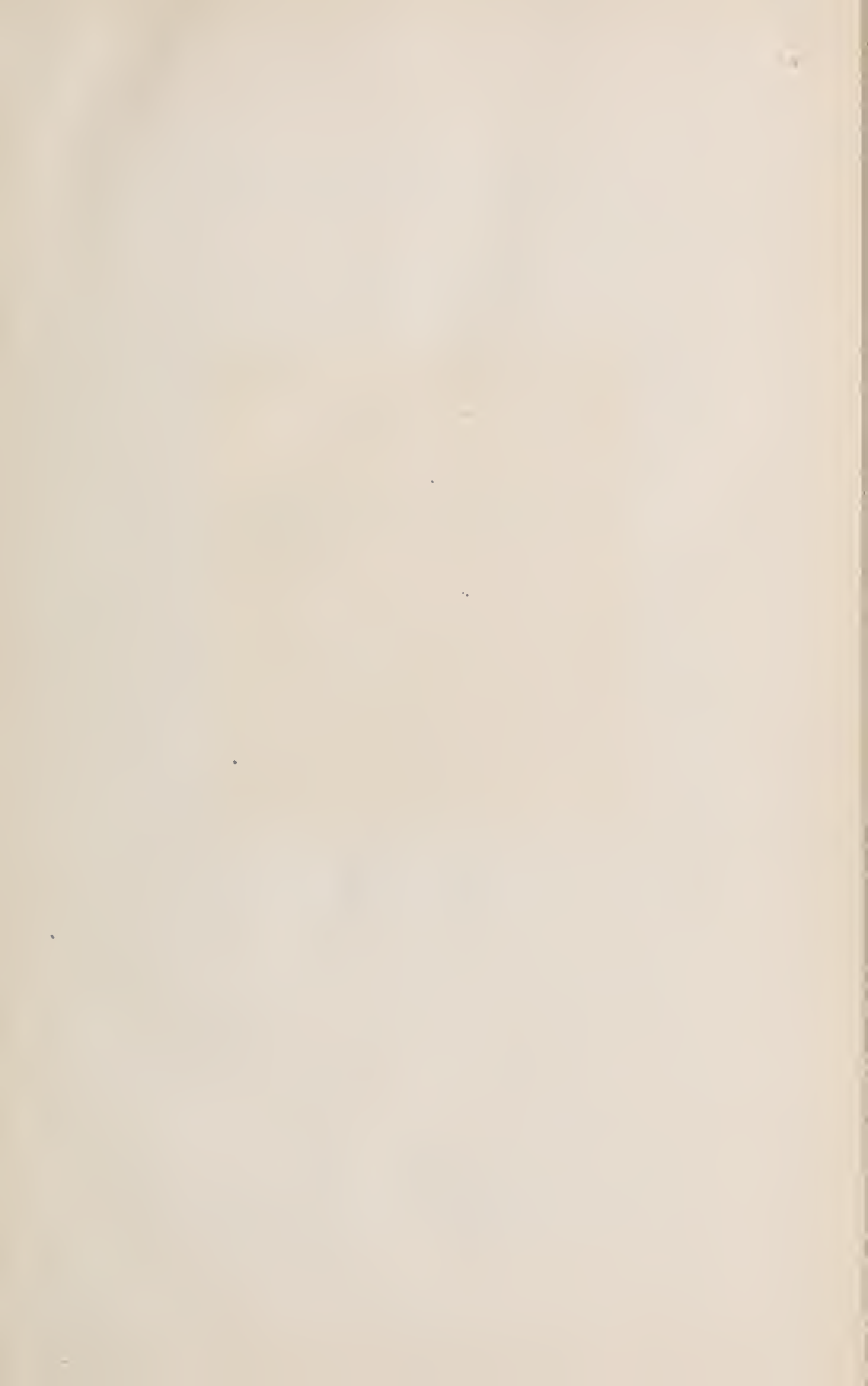
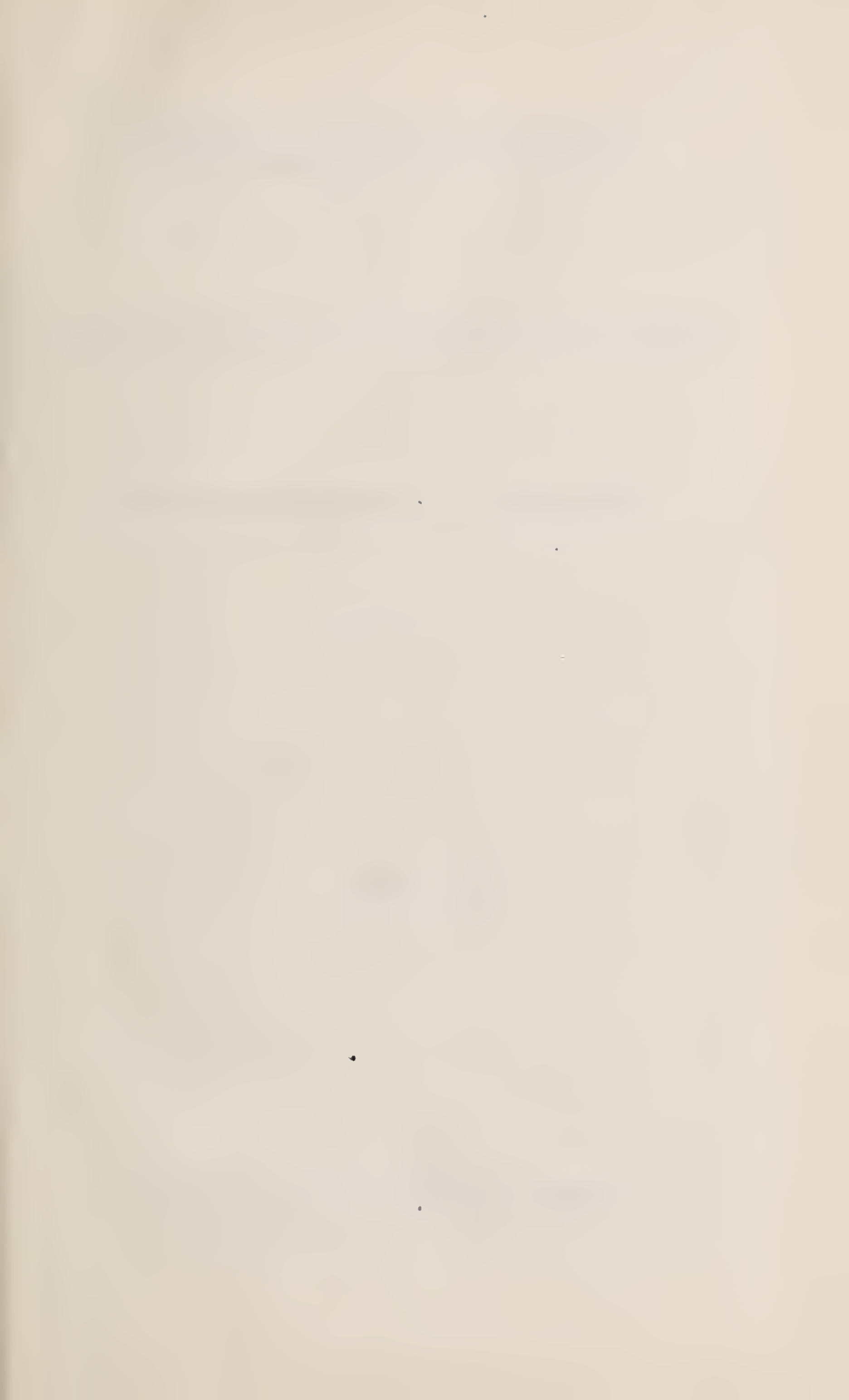










Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1922

München 1923
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Akademische Buchdruckerei F. Straub in München.

Inhaltsübersicht.

I. Sitzungsberichte.

II. Abhandlungen.

Sitzungsberichte

der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften 1922.

Sitzung am 14. Januar.

1. Herr Frank spricht:

Über die Theorie der Schall-Leitung im Ohr.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr M. Schmidt trägt vor:

Neuzeitliche Erdkrustenbewegungen in Frankreich.

Er berichtet im Anschluß an seine in der Sitzung vom 6. Juli 1918 gemachte Mitteilung über tektonische Höhen- und Lagenänderungen von Messungspunkten im oberbayerischen Alpenvorland über sehr ausgedehnte neuzeitliche Erdkrustenbewegungen in Frankreich, die sich auf das ganze Gebiet zwischen dem Mittelmeere und der belgischen Küste und von den Pyrenäen bis zum rheinischen Graben erstrecken.

Diese Bodensenkungen stehen, wie der Anblick einer orographischen Karte, in welcher die Linien gleicher Bodensenkung mit 10 cm Höhenabstand dargestellt sind, ohne weiteres erkennen läßt, mit der Gebirgsbildung im engsten Zusammenhang und zeigen von der Mittelmeerküste bei Marseille dem Rhonetal entlang bis zum Kanal La Manche bis zu 1 m stetig anwachsende Beträge.

Ihre Größe ist durch die in den Jahren 1857 bis 1864 ausgeführten und 1884—1893 mit der größten Sorgfalt wieder-

holten Landesnivellements von Frankreich, die eine Linienlänge von 15000 und 12000 km besitzen, mit voller Sicherheit nachgewiesen. Die Genauigkeit dieser Nivellements entspricht den für Erdmessungszwecke in den Jahren 1867 in Berlin und 1912 in Hamburg für den Nachweis von Bodenbewegungen aufgestellten Grundsätzen. Die aus dem Vergleich der Meereshöhen einer großen Zahl von Höhenfestpunkten, die bei den Nivellements gemeinsam sind, nachgewiesene Bodensenkung muß als völlig zuverlässig bestimmt angesehen werden.

Der Betrag der Bodensenkung nimmt vom Mittelmeer bei Marseille gegen Norden bis zur belgischen Küste stetig zu und hat in 25 Jahren dort eine Größe von 1 m erreicht. Im Mittel beträgt diese Senkung beiläufig 25 mm im Jahre.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

3. Herr G. Faber macht

Bemerkungen zu Sätzen der Gaußschen theoria combinationis observationum.

In seiner theoria combinationis observationum hat Gauß Sätze mitgeteilt, teils mit Beweis, teils ohne, die erlauben, aus der bloßen Kenntnis des mittleren Fehlerquadrats Aussagen über die Fehlerkurve zu machen. Der Vortragende gibt einfache Beweise für diese Sätze und für andere des gleichen Gedankenkreises. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

4. Herr F. Lindemann legt für die Sitzungsberichte vor:

1. Eine Abhandlung: Integration der partiellen Gleichung $s = \sin z$.
2. Eine Mitteilung des Herrn Dr. O. Volk: Über die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(x)|$.

Es wird der Beweis erbracht, daß die Reihe $\sum_0^{\infty} n\,|P_n(x)|$ für $-1 < x < 1$ divergiert. Dies gelingt mit Hilfe der Heineschen asymptotischen Darstellung der Kugelfunktionen und eines Satzes von Fatou über Fouriersche Reihen.

5. Herr S. Finsterwalder teilt mit eine Arbeit des Herrn H. Liebmann in Heidelberg:

Die Boursche Methode der Flächenbestimmung aus dem Linienelement.

E. Bour hat die Bestimmung der Flächen mit gegebenem Bogenelement auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückgeführt. Diese Differentialgleichung wird hier nach verschiedenen Methoden bearbeitet, und dabei z. B. in einem Spezialfall die vollständige Klasse aufeinander abwickelbarer Flächen mit vorgeschriebenem Bogenelement, die eine starre Kurve gemein haben, abgeleitet.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

Sitzung am 4. Februar.

1. Herr E. Kayser hielt (im Anschluß an den Vortrag des Herrn M. Schmidt in der Januar-Sitzung) einen Vortrag

Über merkwürdige Senkungen des Bodens im Norden Frankreichs. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr S. Günther legt vor:

a) für die Sitzungsberichte eine Abhandlung von Dr. E. Schoy: Eine arabische Abhandlung über die Bestimmung der Giblo (Mekkarichtung);

b) für die Abhandlungen eine Arbeit von Dr. H. Griesberger: Die Erdbeben Bayerns.

3. Herr A. Föppl legt eine Abhandlung von Ludwig Föppl vor, in der die von Kirchhoff zuerst bemerkte und später auch von Hess untersuchte Analogie zwischen Kreisel und elastischer Linie von neuem besprochen wird. Veranlassung dazu gab die in neuerer Zeit üblich gewordene Darstellung

der Kreiseltheorie, die den anschaulichen Begriff des „Impulsvektors“ oder „Dralles“ überall in den Vordergrund stellt. Schreibt man dementsprechend auch die Gleichung der elastischen Linie in vektorieller Form an, so folgen aus dem Vergleiche sofort in sehr einfacher Weise alle Beziehungen zwischen dem zeitlichen Ablaufe der Kreiselbewegung einerseits und dem räumlichen Verlaufe der elastischen Linie andererseits.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

4. Herr v. Seeliger legt eine Abhandlung von K. Stöckl, Lyzealprofessor in Regensburg, vor: Erdmagnetische Messungen im bayer. Walde 1908—1913. Lamont hat bereits in den fünfziger Jahren auf beträchtliche Störungen der erdmagnetischen Elemente im Gebiete des bayer. Waldes hingewiesen. Noch deutlicher lassen die Beobachtungen vom verstorbenen Professor Messerschmitt vom Anfang dieses Jahrhunderts den Einfluß des Urgebirges auf den Verlauf der erdmagnetischen Elemente erkennen. Zur Untersuchung des genannten Störungsgebietes hat nun Prof. Stöckl in den Jahren 1908—1913 an 195 Orten erdmagnetische Beobachtungen angestellt und die Bearbeitung dieser umfangreichen Untersuchungen durchgeführt, die zu mannigfachen interessanten Resultaten über den Zusammenhang der erdmagnetischen Störungen mit den geologischen Verhältnissen geführt haben. Eine ausführliche, durch zahlreiche bildliche Darstellungen ergänzte Publikationen kann gegenwärtig leider nicht zur Publikation gelangen und der Verfasser muß sich mit der Veröffentlichung der vorliegenden Zusammenfassung begnügen, die übrigens die erhaltenen Resultate in genügender Deutlichkeit hervortreten lassen dürfte. (Erscheint in den Abhandlungen.)

Sitzung am 4. März.

1. Herr Faber spricht:

Uber den Hauptsatz aus der Theorie der konformen Abbildung.

Der Verfasser gibt für den Satz, daß jedes einfach zusammenhängende Gebiet auf ein Kreisgebiet konform abgebildet werden kann, einen neuen Beweis mit Beantwortung der Frage nach der Ränderzuordnung.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr F. Lindemann trägt vor:

Zur Trigonometrie im nicht euklidischen Raume.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

3. Herr A. Sommerfeld legt für die Sitzungsberichte eine Arbeit von A. Kratzer vor:

Störungen und Kombinationsprinzip im System der violetten Cyanbanden.

Die Arbeit schlägt eine Abänderung in der Nuancierung der Bandenlinien (halbzahlige Quanten) vor, welche die Gesetzmäßigkeiten der Banden vollkommener hervortreten läßt.

4. Herr W. Wien teilt mit: Eine Methode zur Unterscheidung zwischen Spektren, die von geladenen oder ungeladenen Atomen ausgesandt werden.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)



Sitzung am 6. Mai.

1. Herr R. Willstätter trägt die Ergebnisse einer Untersuchung Über Invertin vor, die er gemeinsam mit Frln. J. Graser und Herrn R. Kuhn ausgeführt hat. Die Arbeit behandelt die Isolierung des Enzyms in gesteigerter Konzentration und den Einfluß der Verteilung sowie der Begleitstoffe auf seine Wirkung. (Erscheint anderwärts.)

2. Herr E. Stromer macht eine Mitteilung über

Tertiäre Wirbeltier-Reste aus Deutsch-Südwestafrika.

An die in der letzten Dezember-Sitzung gemachte erste Mitteilung anschließend werden die fossilen Wirbeltier-Reste von zwei weiteren Fundorten in den Diamantfeldern von Lüderitzland besprochen.

Davon sind am bemerkenswertesten die Reste von Antilopen, eines Urraubtieres (Creodonten), eines Vorläufers des südafrikanischen Springhasen (Pedetiden), eines Pfeifhasen (Ochotoniden, während fossile bisher nur aus Europa, lebende nur aus dem hohen Norden und nordischen Gebirgen bekannt sind, und endlich eines den jetzigen Klippschliefern Afrikas und den ausgestorbenen Typetherien Südamerikas ähnlichen Vertreters einer bisher unbekannten Säugetierordnung. Zu ihr gehört die einzige Säugetier-Gattung und Art der drei Fundorte, die mit einem anderen, dem Untermiocän des Viktoriasees gemeinsam ist und so die erste Annahme des geologischen Alters jener bestätigen hilft. (Wird später gedruckt.)

3. Herr H. v. Seeliger legt für die Sitzungsberichte vor eine Abhandlung des Herrn Dr. E. Zinner:

Die Vorarbeiten zu einem Handschriften-Verzeichnis der deutschen Sternforschung.

4. Herr S. Finsterwalder teilt mit eine Abhandlung:

Die Lagallysche Formel für den Flüssigkeitsdruck von Heinrich Liebmann in Heidelberg.

Die von Lagally (Münchener Berichte 1921, S. 209—226) entwickelten Formeln für den Flüssigkeitsdruck werden ohne Dyadenrechnung mit elementarer Vektoranalysis berechnet und ergänzt durch Berechnung des Momentes.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

5. Herr A. Pringsheim legt für die Sitzungsberichte zwei Abhandlungen vor:

a) Herr Otto Szász (Frankfurt a. M.):

Über den Konvergenzexponenten der Fourierschen Reihen gewisser Funktionenklassen.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einer Frage, über die bisher nur sehr spezielle Resultate von S. Bernstein und Carlemann vorliegen, nämlich mit der Bestimmung des Konvergenzexponenten $\varkappa$ einer Reihe $\Sigma |a_\nu - b_\nu i|^\varkappa$, wo a_ν, b_ν die Fourierschen Konstanten einer stetigen, mod. 2π periodischen Funktion $f(x)$ bedeuten. Genügt diese einer sogen. „Lipschitzschen“ Bedingung:

$$(1) \qquad |f(x+t) - f(x)| < C \cdot |t|^\alpha \qquad (0 < \alpha \leq 1)$$

oder auch nur der merklich allgemeineren:

$$(2) \qquad \int_0^{2\pi} \{(f(x+2t) - f(x-2t) - 2f(x))\}^2 \cdot dx < C \cdot |t|^{2\alpha},$$

so wird gezeigt, daß die fragliche Reihe bei $\varkappa > \frac{2}{2\alpha+1}$ konvergiert; daß es dagegen sogar unter den der engeren Bedingung (1) genügenden Funktionen solche gibt, für welche jene Reihe bei $\varkappa < \frac{2}{2\alpha+1}$ divergiert, somit den Konvergenzexponenten $\frac{2}{2\alpha+1}$ besitzt. Dieses durch seinen allge-

meinen Charakter merkwürdige Resultat wird mit verhältnismäßig einfachen Mitteln gewonnen.

b) Hans Hamburger (Berlin):

Bemerkungen zu einem Satze über die Riemannsche Zetafunktion.

Der Verfasser hat kürzlich einen Satz veröffentlicht, welcher besagt, daß die Riemannsche Zetafunktion durch ihre Funktionalgleichung und einige weitere funktionentheoretische Eigenschaften bereits eindeutig bestimmt. Für diesen Satz gibt er einen neuen und merklich kürzeren Beweis.

Sitzung am 17. Juni.

1. Herr L. Burmester spricht über die engste Lagerung gleicher Kugeln und deren Zwischenräume bei der Theorie der Filterung des Wassers durch Sand, in dem die Sandkörner als gleiche Kugeln angenommen werden.

2. Herr Faber legt für die Sitzungsberichte vor eine Arbeit

Über nach Polynomen fortschreitende Reihen.

Der Verf. untersucht die Darstellbarkeit analytischer Funktionen durch Reihen, die nach Näherungszahlen oder Näherungsnennern Stieltjesscher Kettenbrüche fortschreiten.

3. Herr A. Pringsheim legt für die Sitzungsberichte vor eine Abhandlung:

Über die Berandung eines endlichen Gebietes und den Jordanschen Kurvensatz.

Ein älterer Satz von Herrn E. Phragmén besagt, daß die vollständige Begrenzung eines endlichen Gebietes mindestens einen zusammenhängenden Teil enthält. Der Verfasser beweist diesen Satz in wesentlich vervollkommneter und verschärfter Fassung und zeigt, wie die hierbei benützte Methode dazu

dienen kann, um für den Satz über die Zweiteilung der Ebene durch jede geschlossene Jordansche Kurve einen Beweis zu gewinnen, welcher die bisher gegebene an Einfachheit und Anschaulichkeit merklich übertreffen dürfte.

4. Herr O. Hönigschmid berichtet

Über die Ergebnisse einiger neuerer Atomgewichtsbestimmungen.

Die Revision des Atomgewichtes des Thalliums durch Analyse des Thalliumchlorides ergab den Wert $Tl = 204,39$, der um 0,39 Einheiten höher ist als der bisher international gültige $Tl = 204,0$.

Die Analyse des Ferrichlorids führte zu dem Atomgewicht des Eisens $Fe = 55,85$ in naher Übereinstimmung mit dem internationalen $Fe = 55,84$.

Durch die Analyse von Bortrichlorid wurde das Atomgewicht des Bors zu $B = 10,82$ bestimmt gegenüber dem internationalen Wert $B = 10,90$.

Aus der Bestimmung der Verhältnisse von Mercurichlorid resp. -bromid ergab sich das Atomgewicht des Quecksilbers zu $Hg = 200,61$ in vollster Übereinstimmung mit dem international gültigen. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

5. Herr von Dyck berichtet über eine Arbeit von Studien-Assessor H. Künneth in Erlangen:

Zur topologischen Untersuchung geometrischer Gebilde.

Es handelt sich in derselben um die Bestimmung der zuerst von Betti eingeführten charakteristischen Zahlen als der einfachsten unterscheidenden Merkmale mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten. Die Bestimmung wird für gewisse zusammengesetzte Mannigfaltigkeiten aus den Bettischen Zahlen ihrer Faktoren durchgeführt. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

Sitzung am 8. Juli.

1. Herr E. Stromer v. Reichenbach macht die dritte Mitteilung über tertiäre Wirbeltier-Reste aus den Diamantfeldern Deutsch-Südwestafrikas.

2. Herr A. Pringsheim legt für die Sitzungsberichte vor eine Abhandlung des Herrn Artur Rosenthal:

Über Gebilde mit einzigem Ordnungsindex.

Jede mögliche Anzahl der Schnittpunkte eines ebenen Gebildes $\mathfrak{M}$ mit einer Geraden werde als ein „Ordnungsindex" von $\mathfrak{M}$ bezeichnet; das Maximum dieser „Ordnungsindizes" ist dann die „Ordnung" von $\mathfrak{M}$. Es wird hier der Nachweis erbracht, daß für jede ganze Zahl $n > 1$ ebene Gebilde mit einzigem Ordnungsindex n existieren, d. h. solche Mengen, die von jeder Geraden in genau n Punkten getroffen werden. Analoge Existenzbeweise ergeben sich für eine Reihe von Verallgemeinerungen. Für $n = 2$ kann ein solches Gebilde kein Kontinuum enthalten, was dagegen für andere Werte von n möglich ist. Allgemein wird für die Gebilde 2. Ordnung festgestellt, daß sie nur dann Kontinua enthalten können, wenn alle drei Ordnungsindizes 0, 1, 2 und zwar in der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ vorkommen.

3. Herr F. Lindemann bespricht eine Arbeit des Herrn Gerhard Kowalewski in Dresden: Die Verwertung gemischter invariabler Flächenelemente zur Berechnung der Differentialvarianten einer ebenen Transformationsgruppe. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

---

*



Sitzung am 4. November.

1. Herr R. Willstätter spricht über eine gemeinsam mit W. Wassermann ausgeführte Untersuchung über Invertin, worin Fortschritte der Adsorptionsmethode zur Isolierung von Enzymen erzielt werden.

Sodann berichtet Herr Willstätter über eine gemeinsam mit A. Pollinger ausgeführte Arbeit Zur Kenntnis der Peroxydase, in der es gelungen ist, den Reinheitsgrad des Enzyms bedeutend zu steigern und die bisherigen Kenntnisse in der Zusammensetzung der Peroxydase zu berichtigen.

Endlich trägt Herr Willstätter eine in Gemeinschaft mit E. Waldschmidt ausgeführte Untersuchung über Pankreasenzyme vor, in der es erreicht wurde, die lipatischen, diastatischen und tryphischen Enzyme vollständig voneinander zu trennen.

2. Herr G. Faber legt für die Sitzungsberichte vor eine Abhandlung:

Abschätzung von Funktionen großer Zahlen.

Der Verfasser leitet asymptotische Reihen für die Taylor-Koeffizienten solcher Funktionen ab, die sich aus der Veränderlichen z und beliebigen Konstanten durch die rationalen Operationen und die Erhebung in den Exponenten der Zahl e bilden lassen. Er gewinnt so insbesondere für die Hermiteschen und die Laguerreschen Polynome Abschätzungen, mit deren Hilfe sich die Frage nach der Entwickelbarkeit gegebener Funktionen in Reihen, die nach diesen Polynomen fortschreiten, leicht lösen läßt.

3. Herr Broili sprach über die Geologie des „Vogelkop“ von Holländisch-Nordwest-Neu-Guinea, auf Grund der Untersuchungen und Aufsammlungen des Müncheners Dr. Eduard

Hartmann, der von 1914—21 in der holländischen geologischen Landesaufnahme tätig war und in den Jahren 19—21 in Neu-Guinea Expeditionsleiter war. Von besonderem Interesse ist die Feststellung von jüngerem Paläozoikum und oberem Jura. Der Chef der geologischen Landesanstalt von Niederländisch-Indien, Herr Minen-Ingenieur Moermann hat in dankenswerter Weise das Material nach München zur Untersuchung geschickt.

4. Herr Erich Kaiser sprach

Uber zwei verschiedenartige Injektionen syenitischer Magmen,

ausgehend von den von ihm untersuchten Gebieten der Serra de Monchique in Portugal und der Namib Südwestafrikas, die für die Erklärung des Eindringens der vulkanischen Massen in die Erdrinde besondere Anhaltspunkte bieten.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

Sitzung am 9. Dezember.

1. Herr Zenneck trägt vor über Elektronen-Relais-Generatoren mit Modulation der Amplitude durch einen Niederfrequenzstrom und über Verwendung dieser Generatoren für Sender und Empfänger der drahtlosen Telephonie und Telegraphie.

2. Herr A. Voss macht eine Mitteilung

Zur Transformation rechtwinkeliger Koordinaten.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

Verzeichnis der im Jahre 1922 eingelaufenen Druckschriften.

Die Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichnis als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Aachen. Geschichtsverein:
— — Zeitschrift, Bd. 43.

Aarau. Historische Gesellschaft:
— — Argovia 39.

Aberdeen. Universität:
— Studies 80—83, 85.

Åbo. Akademie:
— — Acta mathemat. et physica 1.

Allegheny. Observatorium:
— — Publications Vol. 6, Nr. 4 u. 5.

Altenburg. Geschichtsverein Osterland:
— — Mitteilungen 13, 2.

Amsterdam. Aardrijkskundig Genootschap:
— — Tijdschrift, deel 39, 2—6; 40, 1.
— Wiskundig Genootschap:
— — Nieuw Archief, 14, 1.
— — Revue des publications mathématiques, 29, 2.

Annaberg. Geschichtsverein:
— — Mitteilungen 13.

Athen. Bibliothèque de l'école française.
— — Bulletin du correspondance hellénique 46 1—6; 41—43.
— Wissenschaftliche Gesellschaft:
— — Athena, 32—34.
— Ἑλληνομνήμων:
— — Bd. 16.

Augsburg. Historischer Verein:
— — Zeitschrift 45.

Baltimore. Geological Survey:
— — Maryland Geol. Survey 10 (1918).
— Johns Hopkins University:
— — Circular 1921, 1—6; 1922, 1.
— — Journal of mathematics, 43, 2. u. 3.
— — Journal of philology, 165—169.
— — Studies in historical and political science 39, 2. u. 3.

Barcelona. R. Academia de Ciencias y Artes:
— — Boletin 4, 6.
— — Memorias, 12, 18—23; 13, 1—32; 14, 1—12; 15, 1—5; 16, 12—14; 17, 1—15.
— — Nomina del personel 1915/16 — 1921/22.
— Institut d' estudis Catalans:
— — Annari 5 (1913/14).
— — Cadevall, Flora 3, 4.
— — Butlleti de dialectologia Catalana 1915—1921.
— — Puig de Catafalch Vol. 3.
— — Arxius Any 6 und 7.
— — Butlleti de la bibliotheca de Catalanya Nr. 1—8.
— — Treballs de Societat de biologia 1920/21.

Basel. Histor.-antiquarische Gesellschaft:
— — Basler Zeitschrift 15—18, 1. u. 2; 19, 1; 20, 1.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — Verhandlungen, 33
— Universität:
— — Dissertationen 1922.

Batavia. Genootschap van Kunsten en Wetenschappen:
— — Tijdschrift 61, 3—5.
— — Notulen 59, 2. u. 3.
— — Verhandelingen 63, 4; 64, 1.
— — Oudheidkundig verslag 1921, 4; 1922, 1.
— Observatorium:
— — Seismological bulletin 1922, I—V.
— — Observations made at secondary stations 8 (1918).
— — Observations 40.
— — Regenwarnemingen in Nederlandsch-Indie 41 (1919).
— — Verhandelingen 9 u. 10.
— Naturkundige vereenigung in Nederlandsch-Indie:
— — Tijdschrift 81, 3; 82, 1 u. 2.

Bayreuth. Historischer Verein:
— — Archiv 28, 1. u. 2.

Belgrad. Akademie der Wissenschaften:
— — Glas 97—104.
— — Godišnjak 29 u. 30.
— — Zbornik, Srpski etnografski 22. 23.
— — Zbornik istorijski II, 6, 12.

Bergen. Museum:
— — Aarbok 1920/21. 1. 3.
— — Sars 8, 5 u. 6; 9, 1 u. 2.

Berkeley. University:
— — Bulletin of college of agriculture 326—330.
— — Chronicle 23, 1—3.
— — Memoirs 5.
— — Record Vol. 1, 1—3.
— Publications:
— — Botany 7, 10.
— — Geology 12, 6—7; 13, 5. 7. 8; 14, 1—4.
— — History, vol. 12.
— — Mathematics 1; 5—6, 8—14.
— — Zoology 23.

Berlin. Akademie der Wissenschaften:
— — Abhandlungen phil.-hist. Kl. 1922, 1—3; phys.-math. Kl. 1922, 1.
— — Sitzungsberichte „ 1922, 1—14; „ 1922, 1—12.
— — Acta Borussica: Behörden-Organisation Bd. 1, 1;
— — Handelspolitik 2, 1. u. 2.
— Staatsbibliothek:
— — Jahresbericht 1916—20.
— Deutsche Chemische Gesellschaft:
— — Chemisches Zentralblatt 1922.
— — Berichte 55, 6—12; 56, 1.
— Allg. Elektrizitätsgesellschaft:
— — Geschäftsbericht 1921/22.
— Deutsche Geologische Gesellschaft:
— — Abhandlungen 73, 4; 74, 1—4.
— — Monatsberichte 73, 8—12; 74, 1—7.
— Deutsche Physikalische Gesellschaft:
— — Verhandlungen Jg 2, 3; Jg. 3, 1 u. 2.
— Landwirtschaftl. Hochschule:
— — 9 Dissertationen 1921/22.
— Deutsches Archäologisches Institut:
— — Jahrbuch 36 (1921), Heft 1 u. 2.

Berlin. Meteorologisches Institut:
— — Veröffentlichungen 313. 315—318.
— Preuß. Geologische Landesanstalt:
— — Abhandlungen 85. 89. 90.
— — Jahrbuch 41 (1920) I, 1; 39, I, 3; 39 II 1—3; 40 I 3; 40 II 2. u. 3.
— Astronomisches Recheninstitut:
— — Jahrbuch für 1924.
— — Kleine Planeten 1923.
— Verein für Gartenbau:
— — Gartenflora 1922, 5—8.
— Verein für die Geschichte Berlins:
— — Mitteilungen 1922 (39), 4—7.
— Verein für Geschichte der Mark Brandenburg:
— — Forschungen 34, 1 u. 2, 35/1.
— Zeitschrift für Instrumentenkunde:
— — Zeitschrift 1922; 3—6, 8 u. 9.

Bern. Bibliothek:
— — Verhandlungen der schweiz. naturforsch. Gesellschaft 101.
— — Zeitschrift für Schweizerische Geschichte 1 (1921), 1—4.
— Universität:
— — Dissertationen 1922.

Beuron. Erzabtei:
— — Benediktinische Monatsschrift 4 (1922), 1—12; 5 (1923), 1 u. 2; 9 Einzelschriften.

Bielefeld. Naturwissenschaftlicher Verein:
— — Bericht 4.

Bologna. Accademia:
— — Memorie Classe di scienze frs. 7 u. 8.
— — Rendiconto Cl. di sc. mor, ser. II, 5; Cl. di sc. fis. 24 u. 25.
— — Trombetti Glottologia 1922.

Bonn. Verein von Altertumsfreunden im Rheinland:
— — Bonner Jahrbücher, Heft 127.
— Naturhistorischer Verein der preuß. Rheinlande:
— — Verhandlungen 77.

Boston. American Academy of arts and sciences:
— — Memoirs 14, 2 u. 3.
— — Proceedings 50, 4—13; 51, 1—14; 52, 1—13; 53, 1—10; 54, 1 u. 2, 4—6; 55, 1—10; 56, 1—11; 57, 1—10.

Boston. American Urological Association:
— — Transactions 14.
— Society of Natural History:
— — Memoirs Vol. 8, 3.
— — Occasional paper VII, 14.
— — Proceedings 35, 4—6.

Braunsberg. Lyceum Hosianum:
— — Vorlesungs-Verzeichnisse SS. 1922; WS. 1922/23.

Bremen. Naturwissenschaftlicher Verein:
— — Abhandlungen 25, 2.

Breslau. Sternwarte:
— — Veröffentlichungen 2.

Bromberg. Bibliothek:
— — Veröffentlichungen 7 u. 8.

Brünn. Université Masaryk:
— — Spisy 1921, 7; 1922, 6, 8—13.

Brüssel. Société des Bollandistes:
— — Analecta 36. 37. 40.
— — Repert. hymn. vol. 6.

Budapest. Ungarische Geographische Gesellschaft:
— — Földraizi Közlemenyek 50 (1922), 6—8.
— Reichsanstalt für Meteorologie:
— — Jahrbücher 45, 1. u. 4; 46.
— Ornithologisches Institut:
— — Aquila 28.

Buitenzorg (Java). Departement van landbouw:
— — Bulletin du jardin botanique 4, 2; 5, 1.
— — Bulletin de l'institut voor plantenziekten 17.
— — Mededeelingen van het algem. proefstation 11.
— — Mededeelingen voor thee 76, 78—80.
— — Mededeelingen voor plantenziekten 50—53.
— — Treubia 1, 4; 2, 1.

Bukarest. Academia Română:
— — Bulletin de la section hist. 9, 1—4.
— — Bulletin de la section scientifique 7, 7—10; 8, 1—4.

Calcutta. R. Society of Bengal:
— — Journal and proceedings 17, 1—4; 18, 1 u. 2.
— — Journal 75, 4.
— — Memoirs 7, 1—4; 8, 1.

Calcutta. Mathematical Society:
— — Bulletin 12, 4; 13, 1. u. 2.

Cambridge. Observatory:
— — Annual Report 1913/14 –1917/18; 1921/22.
— — Annals 71, 3 u. 4; 73, 2 u. 3; 76—78; 80, 1—3; 81, 1; 82, 1 u. 2; 83, 1—3; 84, 1—3; 85, 1; 91—93.
— — Circulars 184—218.
— Antiquarian Society:
— — Proceedings 71.
— — Prandings During the year 1921.
— Philosophical Society:
— — Proceedings, 21, 2 u. 3.
— — Transactions 22, Nr. 23—25.
— Tufts College:
— — Studies Vol. 5, 1 u. 2.
— Museum of Zoologie:
— — Bulletin 63, 2; 64, 4.
— Astronomical Observatory:
— — Annals 81, 6; 86, 1; 96; 97.
— — Circulars 232—241.
— — Annual Report 75. 76.
— — Annual Report of Syndicate 1920/21.
— — Bulletin 762—780.
— Harvard University:
— — Harvard Oriental Series, 12—15, 17—19, 21, 28—30.
— Peabody Museum:
— — Papers Vol. 7.

Capstadt. R. Society of South Africa:
— — Transactions 10, 2—4.

Charlottenburg. Physikalisch-technische Reichsanstalt:
— — Tätigkeit 1921.
— — Abhandlungen 5, 1 u. 2.

Chicago. Oberlin College Library:
— — Laboratory Bulletin 22. 26. 27.
— John Crerar Library:
— — Report 27.

Christiania. Videnskabs Selskab:
— — Forhandlingar 1919. 1920.
— — Skrifter 1920.

Christiania. Meteorologisches Institut:
— — Jahrbuch 1921.
— Universität:
— — Archiv for mathematik 35.

Chur. Historisch-antiquarische Gesellschaft:
— — Jahresbericht 51.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — Jahresbericht 61.

Cincinnati. University Library:
— — Record 11, 2, 1—6; 17, 2, 1—2, 5—6; 48, 3.
— Observatory:
— — Publications 11—18, 1—4; 19.

Cleveland. Archaeological Institute:
— — Journal of Archaeology 26, 1—3.

Colombo. Museum:
— — Spolia Zeylonica 45.
— — The Buddhist Annual of Ceylon 1, 3.

Columbia. University Library:
— — Studies (social science) 3, 3.
— — Studies (philosophy series) 3, 2.
— — Bulletin 22, 10 u. 16.

Cordoba. Academia:
— — Actas 7, 3.
— — Boletin 25, 3—4; 24, 3 u. 4; 26, 1,
— — Miscellanea 5 und 6.

Danzig. Westpreußischer Geschichtsverein:
— — Mitteilungen 21.
— — Zeitschrift 62. 63.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — Schriften 15, 3 u. 4.
— Westpreuß. botan.-zool. Verein:
— — Bericht 44.

Darmstadt. Firma Merck:
— — Jahresbericht 33. 34. 35.
— Historischer Verein:
— — Archiv für hessische Geschichte 13, 1—3.
— — Quartalblätter 6, 17—24.

Delft. Technische Hochschule:
— — 9 Dissertationen 1922.

Dessau. Verein für Anhalt. Geschichte:
— — Mitteilungen 14, 1.

Dorpat. Estnische Gesellschaft:
— — Sitzungsberichte 1921.
— — Jahresbericht der estnischen Philologie. 1. 1918.
— Universität:
— — Acta et commentationes A 2; B 2.
— Naturforscher-Gesellschaft:
— — Sitzungsberichte 28 (1921).
— — Archiv für Naturkunde Livlands 14, 3.

Dresden. Sächsischer Altertumsverein:
— — Neues Archiv 43.
— — Jahresbericht für 1921.
— Journal für praktische Chemie:
— — Journal 1921, 9—12; 1922, 1—12.

Drontheim. Norske Videnskabens Selskab:
— — Skrifter 1920.
— — Aarsberetning 1920.

Dublin. Royal Irish Academy:
— — Proceedings, 32 A 3—7; B 3—21; C 6—21.
— — „ 33 A 1—6; B 1—6; C 1—19.
— — „ 34 A 1—6; B 1—13; C 1—11.
— — „ 35 A 1—4; B 1—11; C 1—12.
— — „ 36 A 4; B 2 u. 3; C 5—9.
— — Royal Dublin Society:
— — Scientific Proceedings 16, 14—39; 17, 1—10.

Easton. American Chemical Society:
— — Journal 44 (1—12); 45, 1.

Edinburgh. Royal Society:
— — Proceedings 42, 1 u. 2.
— — Transactions 52, 4; 53, 1.

Eisenberg. Geschichts-Verein:
— — Mitteilungen 35.

Emden. Gesellschaft für bildende Kunst:
— — Upstalsboom-Blätter 10—11.

Erlangen. Universität:
— — 264 Dissertationen 1922.

Ferrara. Accademia di scienze mediche:
— — Atti 89—91; 95; 96.

Florenz. Biblioteca Nazionale:
— — Bollettino 247—258.
— R. Istituto di studi superiori:
— — Sezione di filologia 3.
— Società di studi geografici:
— — Rivista 18, 5—12; 19, 7—12.

Frankfurt a. M. Senckenbergische Gesellschaft:
— — Abhandlungen 37, 3 u. 4.
— — Bericht 51 und 52.
— — Senckenbergiana 4, 1—6.
— Römisch-germanische Kommission:
— — Bericht 13.

Freiburg i/Br. Kirchengeschichtlicher Verein:
— — Diözesanarchiv 49. 50.
— Universität:
— — Dissertationen 1922.
— — Jahreshefte 1920/21, Nr. 1. 5. 6; 1921/22, Nr. 1.

Friedrichshafen. Verein zur Geschichte des Bodensees:
— — Schriften 50.

Fukuoka (Japan). Universität:
— — Mitteilungen Bd. 5, 3; 6, 1.

Geestemünde. Männer vom Morgenstern:
— — Jahrbuch 19.
— — Mitteilungen 4.

Geneva (N. Y.). U. St. Agricultural Experiment Station:
— — Bulletin 474—480. 483—493.
— — Technical bulletin 81—88.
— — Annual Report 40.

Genf. Institut National:
— — Bulletin 44. 45.
— Journal de chimie physique:
— — Journal 19, 4.
— Société d'histoire et d'archéologie:
— — Bulletin 4, 7 u. 8.
— Société de physique et d'histoire naturelle:
— — Compte rendu 39, 1 u. 2.
— — Mémoires 39, 7.

Giessen. Universität:
— — Thesen 1921 u. 1922.
— Oberhessischer Geschichtsverein:
— — Mitteilungen 24.
— Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde:
— — Bericht (med. Abt.) 13.
— — Bericht (nat. Abt.) 8.
— Universitäts-Bibliothek:
— — Schriften 1922.
— — Nachrichten der Gießener Hochschulgesellschaft Jahrg. 2, 1 u. 2; 3 u. 4.

Görlitz. Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Lausitzisches Magazin 97.

Göteborg. Högskola:
— — Årskrift 25—27.
— — Handlingar 21 u. 22.

Göttingen. Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Abhandlungen (phil.-hist. Kl.) 17, 2. 3.
— — Abhandlungen (math.-phys. Kl.) 11, 1.
— — Gauß 10, 2.
— — Gelehrte Anzeigen 184, 1—9.
— — Nachrichten (phil.-hist. Kl.) 1921, 2.
— — Nachrichten (math.-phys. Kl.) 1922, 1.
— — Geschäftliche Mitteilungen 1922.

Granville. Scientific Association:
— — Bulletin 19, 9—16.

Graz. Universität:
— — Verzeichnis der Behörden 1920/21.
— — Verzeichnis der Vorlesungen 1922/23.
— Historischer Verein:
— — Zeitschrift 17.

Greifswald. Naturwissenschaftlicher Verein:
— — Mitteilungen 48/49.

Groningen. Wolters:
— — Neophilologus 6, 4; 8, 1 u. 2.

Guben. Gesellschaft für Anthropologie:
— — Niederlausitzer Mitteilungen 15, 2.

Haag. Gesellschaft zur Verteidigung der christlichen Religion:
— — Programm 1922.
— K. Instituut voor de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indie:
— — Bijdragen 78, 3 u. 4.
— Nijhoff:
— — Bijdragen voor vaderlandsche geschiedenis 8, 3 u. 4; 9, 1—4.

Haarlem. Hollandsche Maatschappij der wetenschappen:
— — Archives Neérlandaises A 6, 1 u. 3; C 6, 4 u. 7.
— Musée Teyler:
— — Archives 5.
— — Verhandelingen 21.

Hall. Historischer Verein:
— — Württembergische Franken 13.

Halle. Leopoldinische Akademie:
— — Nova Acta 104. 105.
— — Leopoldina 58, 4—6.
— Deutsche Morgenländische Gesellschaft:
— — Abhandlungen 16, 1.
— — Zeitschrift 76, 1 u. 2.
— Thüringisch-Sächsischer Verein für Erforschung des vaterländischen Altertums:
— — Zeitschrift 11, 2.
— Universität:
— — Dissertationen 1921.
— — Jahrbuch der philosophischen Fakultät 1920, I.

Hamburg. Stadt-Bibliothek und Universität:
— — Verhandlungen 1921.
— — Entwurf des Budgets 1922.
— — Jahrbuch 38, Beiheft zoologisches Museum.
— Mathematische Gesellschaft:
— — Mitteilungen 6, 2.
— Deutsche Seewarte:
— — Annalen 50; 51, 1.
— — Aus dem Archiv 39, 2; 40, 1 u. 2.
— Verein für Hamburgische Geschichte:
— — Mitteilungen 40, 4—7.
— — Zeitschrift 25, 1.
— Naturwissenschaftlicher Verein:
— — Verhandlungen 29.

Hanau. Geschichtsverein:
— — Geschichtsblätter 5.
— Wetterauische Gesellschaft:
— — Bericht 1901—21.

Hannover. Historischer Verein für Niedersachsen:
— — Zeitschrift 87 (1922).

Hartford. Geological Survey:
— — Bulletin 22—24. 26. 31. 32.

Heidelberg. Akademie:
— — Abhandlungen (math.-phys. Kl.) 10. 11.
— — Sitzungsberichte (phil.-hist. Kl.) 1922, 1 u. 2.
— — Sitzungsberichte (math.-phys. Kl.) 1922 A 1 u. 2.
— Zeitschrift für Assyriologie:
— — Zeitschrift 34.
— Wissenschaftliche Gesellschaft [Straßburg]:
— — Schriften, N. F. 5. 6.
— Universitäts-Bibliothek:
— — Schriften 1922.
— — Jahrbuch (philos.) 1920/21 u. 1921/22, 1 u. II.
— — Jahrbuch (med.) 1920/21.
— — Anzeige S.S. 1921 u. 1922; W.S. 1921/22 u. 1922/23.
— Historisch-philosophischer Verein:
— — Neue Heidelberger Jahrbücher 21, 2.
— Naturhistorisch-medizinischer Verein:
— — Verhandlungen 15, 1.

Helgoland. Biologische Anstalt:
— — Meeresuntersuchungen Kiel 19.

Helsingfors. Finnische Altertumsgesellschaft:
— — Suomen Museo 27. 28.
— — Tidskrift 32.
— Akademie der Wissenschaften:
— — Annales A 14—16; B 15.
— — Ff Communications 35—41.
— Finnländische Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Acta 50.
— Finska forstsamfundet:
— — Acta 13—16.
— Universitäts-Bibliothek:
— — Dissertationen 1920/21.

Hobart Town. R. Society of Tasmania:
— — Papers and proceedings 1921.

Indianapolis. Academy of Sciences:
— — Proceedings 1921.

Ingolstadt. Historischer Verein:
— — Sammelblatt 41.

Jena. Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft:
— — Zeitschrift 58, 1—3.
— Verein für thüringische Geschichte:
— — Zeitschrift 25, 1.
— Fischer:
— — Naturwissenschaftliche Wochenschrift 1922.

Johannisburg. Union Observatory:
— — Circular 54. 55.

Jowa City. Universität:
— — Jowa Studies 56. 59. 61. 62.

Kahla. Verein für Geschichte:
— — Mitteilungen 4.

Karlsruhe. Badische Historische Kommission:
— — Bericht 35.
— — Zeitschrift 37, 1—4; 38, 1.
— — Oberrheinische Stadtrechte 9.

Kassel. Verein für hessische Geschichte:
— — Mitteilungen 1920/21.

Kaufbeuren. „Heimat“:
— — Deutsche Gaue 23 (1922).

Kiel. Gesellschaft für schleswig-holsteinische Geschichte:
— — Zeitschrift 51.

Klagenfurt. Landesmuseum:
— — Carinthia I, 111 u. 112.
— — Jahresbericht 1920/21.

Königsberg. Physikalisch-ökonomische Gesellschaft:
— — Schriften 59. 60. 63.

Kopenhagen. Carlsberg-Laboratorium:
— — Comptes rendus des travaux 14, 17—19.
— Akademie:
— — Oversigt 1920/21; 1921/22.
— — Meddelelser (biologiske) 3, 1—9.
— — „ (filosofiske) 1, 3.
— — „ (historisk-filologiske) 4, 1—8; 5, 1; 6, 1 u. 2; 7, 1.
— — „ (mathematisk-fysiske) 3, 12—20; 4, 1—10.
— — Skrifter (Cl. des sc.) 6, 2; 7, 1.

Kopenhagen. Conseil permanent pour l'exploration de la mer:
— — Bulletin hydrographique 1905—14.
— — Bulletin statistique 10.
— — Publications de circonstance 75—76.
— — Rapports et procès verbaux 28.
— Dansk naturhistorisk förening:
— — Meddelelser 73. 74.
— Botanisk Haves Bibliothek:
— — Arbeijder 98—100.
— Kommissionen for havundersøgelser:
— — Middelelser (Fiskeri) 6, 7—9; 7, 1.
— — Skrifter 7. 8.
— Astronomisches Observatorium:
— — Publikationer 37—40.
— Biologische Station:
— — Report 28. 29.

Kuraschiki (Okayama). Ohara-Institut:
— — Berichte 1, 1—5; 2, 1.

Kyoto. Universität:
— — Acta scholae medicinalis 4, 2—4; 5, 1.

Lahore. Philosophical Society:
— — Proceedings 2 (1917—20).

Laibach. Musealverein:
— — Carniola 9, 3 u. 4.

Landshut. Historischer Verein:
— — Verhandlungen, 55. 56, 1.

La Plata. Universidad:
— — Contribucion (ser. matem.) 3, 1.
— — „ (ser. tecnica) 3, 1.
— — Anuario 12.

Lausanne. Société Vaudoise des sciences naturelles:
— — Bulletin 204—206.
— — Mémoires 1. 2.

Lawrence. University of Kansas:
— — Science Bulletin 13, 1—9.

Leiden. Maatschappij der Nederlandsche letterkunde:
— — Handlingen 1920/21.
— — Levensberichten 1919/20.
— — Tijdschrift 40, 1—4.

Leiden. Laboratorium der Universität:
— — Communications 156. 157.

— Mnemosyne:
— — Bd. 49. 50.

— Museum:
— — Jg. 29, 8—12; 30, 1—4.

— Sternwarte:
— — Annalen 13, 1 u. 2; 14, 1.

Leipzig. Deutsche Bücherei:
— — 9. Bericht.

— Verlag Chemie:
— — Zeitschrift für Pflanzenernährung 1922 I 1 u. 2.

— Jablonowskische Gesellschaft:
— — Jahresbericht 1921.
— — Preisschriften 50. 51.

— Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Abhandlungen der philol.-hist. Klasse 36, 4 u. 5; 37, 1 u. 2.
— — Abhandlungen der math.-phys. Klasse 36, 5; 38, 5—9.
— — Berichte über die Verhandlungen der phil.-hist. Klasse 73, 2; 74, 1.
— — Berichte über die Verhandlungen der math.-phys. Klasse 73, 5; 74, 1 u. 2.

— Teubner:
— — Enzyklopädie der math. Wiss. III 1 Heft 9; III 3 Heft 6; V 2 Heft 5; VI 2 B Heft 1.

Lemberg. Sevčenko-Gesellschaft:
— — Chronik 56—59.
— — Materiaux ethnol. ukr.-ruth. 16—20.
— — Sammlung, ethnogr. 37. 38.
— — Mitteilungen 122—132.

— Verein für Volkskunde:
— — Lud, Bd. Ser. II, 1, 1 u. 2 (= 21).

Leoben. Montanist. Hochschule:
— — Berg- und Hüttenärarisches Jahrbuch 69/70, 1—6.

Lincoln. University of Nebraska Library:
— — Extension bulletin 63.
— — Bulletin of exper. station 179. 180.
— — Research bulletin 19.
— — Circular 14—17.
— — Annual Report 35.
— — Studies 14—19; 20, 1 u. 2.

Linz. Museum:
— — Jahresbericht 79.

Lissabon. Biblioteca Nacional:
— — Reinpressaes 1 u. 2.
— Société Portugaise des sciences naturelles:
— — Bulletin 9, 1.
— — Memorias (Ser. geol. 1—3; ser. biol. 2. 4; ser. zool. 3; ser anthrop. 1).
— Universität:
— — Archivo de anatomia 9, 2 u. 3; 2, 1—4; 3, 1—3; 4, 1 u. 2; 5, 1—3; 6, 1; 7, 1.

Löwen. Société scientifique de Bruxelles:
— — Annales 41, 3—4; 42, 1.

London. British Academy:
— — Proceedings and transactions 1913/14. 15/16. 17/18.
— — Schweich lectures 1913—20.
— — Records of social and economical history 1. 2. 4. 5.
— R. Society:
— — Philosophical transactions A 600—611;
— — „ „ B 385—388.
— — Proceedings A 709—717; B 653—659.
— — Yearbook 1922.
— Geological Society:
— — Quarterly Journal 308—312.
— — Geological literature 1920—22.
— — List of members 1922.
— Linnean Society:
— — Journal (Botary) 287—307.
— — „ (Zoology) 218—232.
— — Proceedings 1913/14—1921/22.
— — Transactions (Botany) 8, 9; (Zool.) 17, 1—4; 18, 1.
— — List of members 1922/23.

Lund. Museum:
— — Redogørelse 1921/22.
— „Botaniska Notiser“:
— — Notiser 1922, 3—6.
— Universität:
— — Acta 17 (1921) I. II.
— — Arsberättelse 1920/21—1921/22.
— — Årskrift 21.
— — Bibelforskaren 1921.
— — Skrifter human. vetenskapssamfundet 4. 5.

Luxemburg. Société des naturalistes:
— — Bulletins 14. 15.

Luzern. Naturforschende Gesellschaft:
— — Mitteilungen 8.

Madison. Wisconsin Geolog. Survey:
— — Bulletin Nr. 55. 57. 58. 64.
— Washburn Observatory:
— — Publications 10, 4; 13, 1.

Madras. Government:
— — Acharya u. Sastri 1921.

Madrid. R. Academia de ciencias exactas:
— — Anuario 1922.
— — Discursos 1920.
— — Revista 19, 1—6.
— R. Academia de la historia de España:
— — Boletín 80, 3 u. 6; 81, 2—4; 82, 1.
— Universität:
— — Trabalos de laboratorio biologico 17—19. 20, 1 u. 2.
— Sociedad española de fisica y quimica:
— — Anales 187—197.

Magdeburg. Museum:
— — Abhandlungen und Berichte 3, 4.

Mailand. R. Istituto:
— — Rendiconti 47—55, 15.
— Società Italiana di scienze naturali:
— — Atti 54—59; 61, 1 u. 2.

Mainz. Altertumsverein:
— — Mainzer Zeitschrift 15. 16.

Mannheim. Altertumsverein:
— — Mannheimer Geschichtsblätter 23.

Mantua. Accademia Virgiliana:
— — Monumenta I.
— — Miscellanea, 3 Bde.

Marburg. Gesellschaft für Naturwissenschaften:
— — Sitzungsberichte 1921.

Maredsous. Abbaye:
— — Revue bénédictine 34, 2—4.

Meiningen. Henneberger altertumsforschender Verein:
— — Henneberger Blätter, Okt. 1921.

Meissen. St. Afra:
— — Jahresbericht 1918—1922.

Melbourne. R. Society of Victoria:
— — Proceedings 34, 1 u. 2; 35, 1.

Mexiko. Instituto geologico:
— — Boletin 37.
— Sociedad cientifica Antonio Alzate:
— — Memorias y revista 39, 9—12; 40, 1—6; 41, 1.

Middelburg. Seeländische Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Archief 1922.

Milwaukee. Public Museum:
— — Yearbook 1921, I, 1—116.

Minneapolis (Minnesota). University:
— — Bulletin 122. 130. 132. 134—141. 143—171. 178—193. 195—197.
— — Bulletin (school of mines 4. 6. 7).
— — Farmers library 5, 4.
— — Current Problems 2—8. 11. 13.
— — Studies biological 3.
— — „ botanical 4, 4.
— — „ economics 1.
— — „ in child welfare 1. 4. 5. 7.
— — „ in social sciences 2—9.
— — „ in language 1—8.
— — University studies 15. 18. 19.
— — Geological Survey 11—14; 16. 17.

Modena. Società dei Naturalisti e Matematici:
— — Atti 6 (52).

Mount Hamilton. Lick Observatory:
— — Bulletin 336—342.

München. Landesanstalt für Gewässerkunde:
— — Jahrbuch 21.
— — Monatsbericht 1922, 1—12.
— — Abhandlungen 1.
— Landeswetterwarte:
— — Jahrbuch 1921.
— — Übersicht 1922, 1—9.
— Universität:
— — Schriften 1922.

Münster. Provinzialverein für Wissenschaft und Kunst:
— — Jahresbericht 1920/21 u. 1921/22.
— Verein für Geschichte Westfalens:
— — Zeitschrift 79, 1.

Neapel. Accademia di archeologia:
— — Atti, N. Ser. 4—7.

Neuburg. Historischer Verein:
— — Kollektaneenblatt 86.

Neuchâtel. Société Neuchâteloise de géographie:
— — Bulletin 29 u. 30.
— Société des sciences naturelles:
— — Bulletin 46.
— Université:
— — Dissertationen 1921/22.
— — Programme des cours 1922, 1922/23.
— — Recueil 9.

New Albany (Ind.):
— — Contributions to Indiana palaeontology, Vol. 1 (= 1—20), 1898 bis 1904; Vol. 2, 1—3.

New Haven. Connecticut Academy of arts and sciences:
— — Memoirs 4—7.
— — Transactions 23, 1—416; 24, 1—243; 25, 342—408; 26, 1—179.
— Yale University:
— — Report 1919/20, 1920/21.

New York. Academy of sciences:
— — Annals 24, 171—443; 26; 27, 1—191; 28, 1—200; 29, 1—139.
— American Philological Association:
— — Transactions and proceedings 52.
— American Association of genito-urinary surgeons:
— — Transactions 13. 14.
— American Museum of Natural History:
— — Bulletin 42—44.
— — Journal 17. 18. 19, 1—6.
— — Natural History 22, 1—5.
— — Guide Leaflets 54. 55.
— — Novitates 36—54 (außer 43—47).
— — Anthropological papers 27.
— — Report 52. 53.
— Rockefeller Institute:
— — Studies 38.
— — List of publications 1922.

New York. American Geographical Society:
— — Geographical Review 1920, 1—3; 1921, 4; 1922, 2 u. 3.
— Geological Society:
— — Bulletin 32; 33, 1 u. 2.
— American Jewish Historical Society:
— — Publications 28.
— American Mathematical Society:
— — Bulletin 251—308.
— — Transactions 18, 3 u. 4; 19—21; 22, 1 u. 2; 23, 1—3.
— Columbia University:
— — Dissertationen (15) 1922.
— — Masters essays 1921.
— — University Bibliography 1920.

Nördlingen. Historischer Verein:
— — Jahrbuch 8.

Nürnberg. Naturhistorische Gesellschaft:
— — Abhandlungen 21, 3; 22, 1.
— — Jahresbericht 1921.
— Germanisches National-Museum:
— — Anzeiger 1921.

Osnabrück. Verein für Geschichte und Landeskunde:
— — Mitteilungen 44.

Oxford. Radclyffe Observatory:
— — Results of meteorological observations 51.

Paderborn. Verein für Geschichte Westfalens:
— — Zeitschrift 79, 2.

Padua. Accademia Veneto-Trentina-Istriana:
— — Atti 12 u. 13 (1921).

Parenzo. Società Istriana di archeologia e storia patria:
— — Atti e memorie 33.

Paris. Revue des questions historiques:
— — Revue 51 (1923) Nr. 1.
— Société de géographie:
— — La Géographie 37, 1—5; 38, 1—4.
— Société de philosophie:
— — Bulletin 1921, 5; 1922, 1.
— Société française de physique:
— — Journal de physique 1, 1—3; 3, 9. 10. 12.

Passau. Lyzeum:
— — Jahresbericht 1919/20.

Petersburg. Archäologische Gesellschaft:
— — Marra und Orbeli: Archäologische Expedition 1916 in Wan. Petersburg 1922.
— Société paléontologique:
— — Annuaire 1. 2.
— — Memoires 1.

Philadelphia. Academy of Natural sciences:
— — Proceedings 73, 1—3.
— — Report 1919/20.
— Historical Society of Pennsylvania:
— — Magazine 181. 183—185.
— American philosophical society:
— — Proceedings 60, 1—4.
— University:
— — Contributions from the botanical laboratory 4, 2; 5, 1 u. 2.
— — Proceedings of university day 1921.

Pisa. Società Italiana di fisica:
— — Il nuovo Cimento 68, 2—4; 61, 1—12; 62 (11), 1—4; 62 (12), 5—12; 63 (13), 1—6; 63 (14), 7—12; 64 (15), 1—6; 64 (16), 1—6.

Plauen. Altertumsverein:
— — Mitteilungen 30—32.

Portland (Maine). Society of natural history:
— — Proceedings, vol. 3, part 2.

Posen. Historische Gesellschaft (Deutsche Bücherei):
— — Monatsblätter 19, 10—12; 20, 2 u. 3, 5 u. 6; 21, 3 u. 4; 22, 1 u. 2.
— — Warschauer: Gesch. d. Stadt Gnesen 1918.

Potsdam. Astrophysikalisches Observatorium:
— — Publikationen 78. 79.
— Preuß. Geodätisches Institut:
— — Veröffentlichung 85—87. 89.

Prag. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Sitzungsberichte 1920 (A u. B).
— Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft:
— — Rechenschaftsbericht 1922.
— Lotos:
— — Lotos 67 u. 68.
— Museum:
— — Hanus: Narodei-Museum 1921.

Prag. Čechoslav. Museum:
— — Vestnik 13, 4; 14, 1 u. 2; 15, 1 u. 2.
— Societas entomologica Čechosloveniae:
— — Časopis 14. 15. 18 3 u. 4.
— — Přiručky 10.
— Staatssternwarte:
— — Beobachtungen 78.
— Universität:
— — Ordnung der Vorlesungen 1922/23.
— Verein böhmischer Mathematiker:
— — Časopis 45, 4 u. 5; 46—48; 51, 1—4.

Rathenow. Optische Werke:
— — Mitteilungen 11—14.

Regensburg. Botanische Gesellschaft:
— — Denkschriften 15.
— Historischer Verein:
— — Verhandlungen 72.

Riga. Gesellschaft für Geschichte der Ostseeprovinzen:
— — Mitteilungen 21, 3.
— Naturforscher-Verein:
— — Arbeiten 14.
— Universität:
— — Acta 1—3.

Rio de Janeiro. Biblioteca Nacional:
— — Annaes 39.
— — Boletim bibliographico 3, 1 u. 2.
— Sociedade Brasileira de Sciencias:
— — Revista 4. 5 (1920 u. 21).

Rochester. Academy of science:
— — Proceedings 6, 4.

Rom. Accademia dei Lincei:
— — Memorie (Cl. sc. mor.) 16, 1—9.
— — „ (Cl. sc. fis.) 13, 1—11, 16—18.
— — Notizie degli scavi 18, 1—12; 19, 1—6.
— — Rendiconti (Cl. sc. mor.) 30, 7—12; 31, 1—4;
— — „ (Cl. sc. fis.) 31, 1—12; 2° sem. 1 u. 2.
— Istituto G. Ferraris:
— — Rassegna 1, 1—12; 2, 1—12.
— Specola Vaticana:
— — Pubblicazioni 10. 12.
— — Miscellanea astronomica 2 (= 13—34).

Rostock. Universität:
— — Vorlesungsverzeichnis 1922/23.
— — Dissertationen 1922.

Rotterdam. Bataafsch genootschap der proefonderlijke wijsbegerde:
— — Verslag 1921/22.

Saint-Louis. University:
— — Studies 21—35.

Salzburg. Gesellschaft für Salzburgische Landeskunde:
— — Mitteilungen 62.

San Francisco. California Academy of sciences:
— — Proceedings 10 (1920) 10—12; 11 (1921), 1—17.

São Paulo. Instituto sorotherapico:
— — Anexos 1, 1.

Schleusingen. Hennebergischer Geschichtsverein:
— — Schriften 13.

Sendai (Japan). Universität:
— — Arbeiten aus dem anatomischen Institut 7.
— — Tohoku Mathematical Journal 20, 3 u. 4; 21.
— — Tohoku Journal of experimental medicine 2, 5 u. 6; 3, 1—4.
— — The Science Reports 10, 6; 11, 1—4.
— — „ „ „ II. Ser. 6, 1; 7, 1; III. Ser. 1, 2.
— — Technology Reports 2, 4; 3, 1.

Simla. India Meteorological Department:
— — Memoirs 22, 3—7; 23, 1—5.
— — India Weather Review 1913—1918.
— — Monthly Weather Review 1914, 3—1920, 5.

Sofia. Archäologische Gesellschaft:
— — Bulletin 6 u. 7.
— Universität:
— — Godišnik 8.

Spalato. Archäologisches Museum:
— — Bullettin d'archéologie 40—42, 44.

Speyer. Gymnasium:
— — Jahresbericht 1921/22.
— Historischer Verein:
— — Mitteilungen 39—42.

Stade. Verein für Geschichte:
— — Stader Archiv 12.

Stockholm. Akademie der Wissenschaften:
— — Arkiv för botanik 16—18, 1.
— — Arkiv för kemi 8, 3 u. 4.
— — Arkiv för matematik 16, 3 u. 4; 17, 1 u. 2.
— — Arkiv för zoologie 14, 3 u. 4; 15, 1.
— — Årsbok 1922.
— — Handlingar 60, 1—9 und 54.
— — Jakttagelser, astron. 7—10.
— Landbruks-Akademie:
— — Handlingar 61 (1922), 1—8.
— K. Vitterhets och Antikvitets Akademie:
— — Fornvännen 13—15.
— — Handlingar 34, 1 u. 2.
— Bibliothek:
— — Akzessionskatalog 36.
— Entomologiska föreningen:
— — Tidskrift 43.
— Geologiska förening:
— — Förhandlingar 44.
— Schwedische Gesellschaft für Anthropologie und Geographie:
— — Annaler 4, 1 u. 2.
— — Ymer 42.
— Reichs-Archiv:
— — Meddelanden I, 51—53.

Stonyhurst. Observatory:
— — Results 1921.

Straubing. Historischer Verein:
— — Jahresbericht 24.

Stuttgart. Bibliothek:
— — Geschichtsquellen 20.
— — Vierteljahreshefte 30.
— — Schwäbisches Wörterbuch (Fischer) 66. 67.
— Staatsarchiv:
— — Urkunden und Akten 2, 1 (1922).
— Statistisches Landesamt:
— — Würtemb. Jahrbücher 1919/20.

Tacubaya. Observatorio astronómico:
— — Anuario 43.

Thorn. Kopernikus-Verein:
— — Mitteilungen 28—30.

Tokyo. Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens:
— — Mitteilungen 15 B. C. 17.
— Geological Survey:
— — Bulletin 25, 4.
— — Geology of Empire Zone 21, col. 13; Zone 11, col. 10; Zone 16, col. 10.
— Zoological Society:
— — Annotationes zoologicae 10, 4.
— Universität:
— — Journal of biochemistry 1, 1.
— Earthquake Investigation Committee:
— — Bulletin 9, 3; 10, 1.
— — Contents of publications 2.

Toronto. University:
— — Physiological Series 41—45.
— — Geological Series 12.
— — Biological Series 20.
— — Papers from chemical laboratories 111—129.
— — Papers from physical laboratories 79—84.
— — Philological Series 6.

Trient. Società per gli studi Trentini:
— — Studi Trentini 3, 1—4.

Tübingen. Universität:
— — Universität Tübingen [= Universitätsschriften Tübingen] 18. 19.
— — Tübinger naturwissenschaftliche Abhandlungen 1—4.
— — Jahresbericht der Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften 1920—21.

Turin. Accademia d'agricoltura:
— — Annali 64.
— Museo di zoologia:
— — Bollettino 34. 35 (= 731—742).
— Società Piemontese di archeologia:
— — Olivero Eug.: L'antica Pieve, 1922.

Ulm. Verein für Mathematik:
— — Mitteilungen 17.

*

Upsala. Schwedische Literaturgesellschaft in Finnland:
— — Skrifter 161—165.
— Universität:
— — Arbeten af Ekmans Univ.-Fund 27. 28.
— — Årskrift 1921.
— — Zoologiska Bidrag Suppl.-Bd. 1, 1920.
— — Linnée 8.
— — Bulletin Met. Obs. 53.
— — Årsbok 2, 1920.

Utrecht. Provinciale genootschap van kunsten en wetenschapen:
— — Aantekeningen 1921.
— — Verslag 1921.
— Meteorologisches Institut:
— — Annuaire 1920 A. B.
— — Mededeelingen 26. 27.
— — Ergebnisse aërologischer Beobachtungen 9.
— — Overzicht 19 (1922), 1—11.
— — Onweders 40.
— Physiolog. Laboratorium der Tierärztlichen Hochschule:
— — Onderzoekingen 6. 2.

Vaduz. Historischer Verein für Lichtenstein:
— — Jahrbuch 22.

Venedig. R. Istituto Veneto:
— — Concorsi 1922.

Verona. Museo Civico:
— — Madonna Verona 56. 57.

Vicenza. Accademia Olimpica:
— — Atti 7.

Warschau. Wissenschaftliche Gesellschaft:
— — Rozpravy histor. I, 1 u. 2.
— — Travaux du laborat. de biol. gen. 1. 1. 2. 5.
— — Sprawozdania stacji hydrobiol. 1, 1.
— — Archiwum nauk biol. 1; 1, 3, 4.
— — Travaux du laborat. neurobiol. 3, 1 u. 2.
— — Travaux du laborat. de physiol. 1, 3—12.

Washington. National Academy of Sciences:
— — Memoirs 16, 3.
— — Proceedings 6, 6—12; 7, 1—12; 8, 1—12.
— — Report 1917—1921.

Washington. Bureau of American ethnology:
— — Bulletin 59—75.
— — Report 35. 36.
— Smithsonian Institution:
— — Miscellaneous collections 2650—58, 2662 u. 63, 2669.
— — Report 1920.
— U. S. National Museum:
— — Bulletin 82 I 2; 104, 113—115, 117—119, 122.
— — Contributions to herbarium 18, 3—7; 19; 20, 1—12; 21; 22, 1—6; 23, 1 u. 2; 24, 1—4.
— — Proceedings 59.
— — Report 1920/21, 1921.
— U. S. Naval Observatory:
— — Astron. papers 9, 2.
— — American Ephemeris 1917—1924.
— Surgeon General Office U. S. Army:
— — Index-Catalogue 20.
— U. St. Geological Survey:
— — Bulletin 679. 688. 706. 714. 721. 725 B—J; 726 A B. D—G. 730 A. B; 735 A—C, 736 A. C.
— — Professional papers 123. 129 A—J.
— — Water supply papers 459. 460. 468. 471. 476. 477. 481. 487. 490 B. 500 A—C.
— — Annual report 42.

Weimar. Böhlau:
— — Zeitschrift der Savignystiftung 43.

Wernigerode. Harzverein:
— — Zeitschrift 55 (1922).

Wien. Akademie der Wissenschaften:
— — Almanach 70. 71.
— — Anzeiger 1922, 1—20.
— — Archiv für österreichische Geschichte 109, 1 u. 2.
— — Sitzungsberichte (I. Kl.) 183, 5; 191, 5; 197, 6; 198, 2 u. 4.
— — „ (II. Kl.), I. Abt.: 130, 1—9; IIa Abt.: 130, 1—8; IIb Abt.: 130, 1—10; 131, 1.
— — Mitteilungen der Erdbebenkommission 55—57.
— Gesellschaft der Ärzte:
— — Wiener Klinische Wochenschrift 1922.
— Zoologisch-botanische Gesellschaft:
— — Verhandlungen 69, 6—10; 70, 1—10; 71 (1921).
— Österr. Kommission für internationale Erdmessung:
— — Verhandlungen 1920 und 1921.
— — Astronom.-geod. Arbeiten N.F. 1 (1922).

Wien. Mechitharisten-Kongregation:
— — Handes Amsorya 1921.
— Naturhistorisches Museum:
— — Annalen 35.
— Chliborobska Ukraina:
— — Ukraina 1921, 1—6.
— Geologische Staatsanstalt:
— — Jahrbuch 71, 3 u. 4; 72, 1 u. 2.
— — Verhandlungen 1922, 1—9.
— Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik:
— — Jahrbücher 54.
— — Bericht über die Erdbeben 13.

Wiesbaden. Verein für nassauische Altertumskunde:
— — Annalen 45.
— Verein für Naturkunde:
— — Jahrbücher 74.

Würzburg. Physikalisch-medizin. Gesellschaft:
— — Sitzungsberichte 1920, 3—5.
— — Offiz. Sitzungsprotokolle 1921.
— Universität:
— — Verzeichnis der Vorlesungen 1922/23.
— Historischer Verein:
— — Archiv 62.

Zaragoza. Academia de ciencias:
— — Revista 6 (1921), 1.

Zürich. Antiquarische Gesellschaft:
— — Mitteilungen 29, 3.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — Neujahrsblatt 125.
— — Vierteljahresschrift 67, 1 u. 2.
— Schweizerische Geologische Kommission:
— — Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz 35, 1; 46, 4.
— — Spezialkarten 90 A. B; 94 A; 95.
— Schweizerisches Landesmuseum:
— — Jahresbericht 30.
— Technische Hochschule:
— — Dissertationen 1922.
— — Programm 1922/23.
— Universität:
— — Dissertationen 1922.

Abgeschlossen 1. März 1923.

Neuzeitliche Erdkrustenbewegungen in Frankreich.

Von **M. Schmidt.**

Vorgetragen in der Sitzung am 14. Januar 1922.

Mit einem Kärtchen.

Im Anschluß an meine Mitteilungen über tektonische Höhen- und Lageänderungen von Messungspunkten im bayerischen Alpenvorland (vom 6. Juli 1918) möchte ich über Bodenbewegungen von großer Ausdehnung berichten, welche durch die in der zweiten Hälfte des letzten Jahrhunderts in Frankreich wiederholt ausgeführten Feinnivellements nachgewiesen sind und die wohl ebenfalls als tektonische Erdkrustenbewegungen angesehen werden müssen.

So viel bekannt ist, war der Géographe-Duroi Dupain-Triel (1732—1805) der erste, welcher die Darstellung der Bodengestaltung durch Schichtenlinien von gleichem Höhenabstand zu einer Methode ausbildete und allgemein in Gebrauch brachte. Er tat dies insbesondere durch eine der Pariser Akademie am 4. Mai 1771 überreichte Abhandlung und in einem 11 Jahre später 1782 erschienenen größeren Werke über die Darstellung der Höhengestaltung des Geländes auf Erd- und Seekarten.

Im Jahre 1791 hat derselbe sodann eine Höhenschichtenkarte von ganz Frankreich unter dem Titel veröffentlicht:

„La France considérée dans les différentes hauteurs de ses plaines.“ Par Dupain-Triel, Géographe, à Paris.

Echelle 93 mm = 100 mille toises (1 : 2100000).

In dieser Karte sind außer den Namen vieler Ortschaften und dem hydrographischen Netz, die hauptsächlichsten durch Bergstriche dargestellten Gebirge und Höhenzüge eingetragen und die Höhen der wichtigsten Berggipfel in Toisen eingeschrieben, überdies aber der Verlauf der Höhenschichtenlinien mit 10 Toisen Abstand mit punktierten Linien angegeben und deren Abstufung durch einzelne Profilschnitte zur Anschauung gebracht.

Eine der Karte ursprünglich beigefügte Erläuterung, welche insbesondere über die Art der vorgenommenen Höhenmessungen nähere Aufschlüsse enthalten haben könnte, ist leider abhanden gekommen, doch muß wohl angenommen werden, daß die der Einzeichnung der Schichtenlinien zugrunde liegenden Höhenangaben durch Barometermessungen erhalten worden sind, die in der damaligen Zeit für geographische Zwecke hauptsächlich im Gebrauch waren.

Zur Berechnung dieser Messungen wurde voraussichtlich die von Bouguer bei seinen peruanischen Messungen benutzte Barometerformel angewendet, die gegen Ende des 18. Jahrhunderts durch Laplace auf die jetzige, seither noch unübertroffene Form gebracht worden ist.

Eine dauernde und scharfe Bezeichnung der Lage der Höhenpunkte im Gelände und eine genaue Einzeichnung in die Karte ist nicht erfolgt, so daß sich ihre Lage gegenwärtig nicht mehr auffinden läßt, wenn man sie zum Zwecke der Wiederholung der Höhenmessungen wieder aufsuchen wollte. Doch wenn letzteres auch möglich wäre, so würde die geringe Genauigkeit der barometrischen Höhenmessung, die selbst bei Verwendung der verbesserten Höhenmeßbarometer der Neuzeit nicht über 1 bis 2 m hinausgeht, die im Laufe der Zeit etwa eingetretenen geringen Höhenänderungen der Messungspunkte nicht mit der erforderlichen Zuverlässigkeit bestimmen lassen.

In den Jahren 1857 bis 1864 sind sodann in Frankreich das ganze Land umfassende geometrische Nivellements von großer Genauigkeit durch das Ministerium der öffentlichen Arbeiten unter der Oberleitung von Bourdalouë ausgeführt

worden, die eine Länge von 15000 km besitzen und eine wahrscheinliche Größe der zufälligen Fehler aufweisen, welche 2 bis 3 mm auf das Kilometer nicht überschreiten. Dieser Genauigkeitsgrad entspricht den Grundsätzen, welche von der 2. im Jahre 1867 in Berlin abgehaltenen Erdmessungskonferenz für solche Nivellements aufgestellt worden sind, welche als Grundlage für alle weiteren Höhenmessungen eines Landes und für Untersuchungen über Hebungen und Senkungen des Bodens zu dienen bestimmt sind, die durch spätere Wiederholung dieser Nivellements in nicht zu langen Zwischenräumen festgestellt werden sollen.

Gleichwohl hat man schon im Jahre 1878 die Ergebnisse des von Bourdalouë geleiteten ersten geometrischen Landesnivellements von Frankreich den Bedürfnissen des öffentlichen Dienstes und den Forderungen der Wissenschaft für nicht mehr ganz entsprechend erachtet und hat sich trotz der hohen Kosten zu einer Erneuerung des ganzen Landesnivellements entschlossen.

Zu diesem Zweck ist eine aus Vertretern der Ministerien des Krieges, des Inneren und der öffentlichen Arbeiten gebildete große Kommission von Gelehrten, Technikern und Verwaltungsbeamten mit der Aufgabe betraut worden, Vorschläge für die Ausführung eines neuen Landesnivellements zu entwerfen, dessen Linien hauptsächlich den Eisenbahnen und den Meeresküsten folgen und an die vorhandenen Seepegel in den Hafenplätzen angeschlossen werden sollten. Außerdem hatten die neuen Nivellementslinien möglichst viele noch erhaltene Höhenpunkte des von Bourdalouë ausgeführten Nivellements in sich aufzunehmen, um deren Höhen zu berichtigen und etwa eingetretene Bodenbewegungen durch Vergleichung der Höhen der beiden Nivellements erkennen zu können.

Das Hauptnetz des neuen Nivellements mit einer Gesamtlinienlänge von 12000 Kilometer kam in den Jahren 1884 bis 1893 unter der Oberleitung des Mineningenieurs Ch. Lallemand zur Durchführung und hält sich hinsichtlich der Größe seiner Fehler in den von der Hamburger Erdmessungskonferenz

im Jahre 1912 für Feinnivellements von erhöhter Genauigkeit festgesetzten Grenzen.

Die Vergleichung der durch das neue Nivellement bestimmten Meereshöhen mit den beiläufig 25 Jahre früher durch das alte Nivellement erhaltenen Höhen identischer Festpunkte läßt bemerkenswerte Unterschiede im Sinne von Bodensenkungen erkennen, welche vom Mittelmeer bei Marseille bis an die belgische Küste stetig zunehmen und bis zu einem Betrag von 1 m ansteigen.

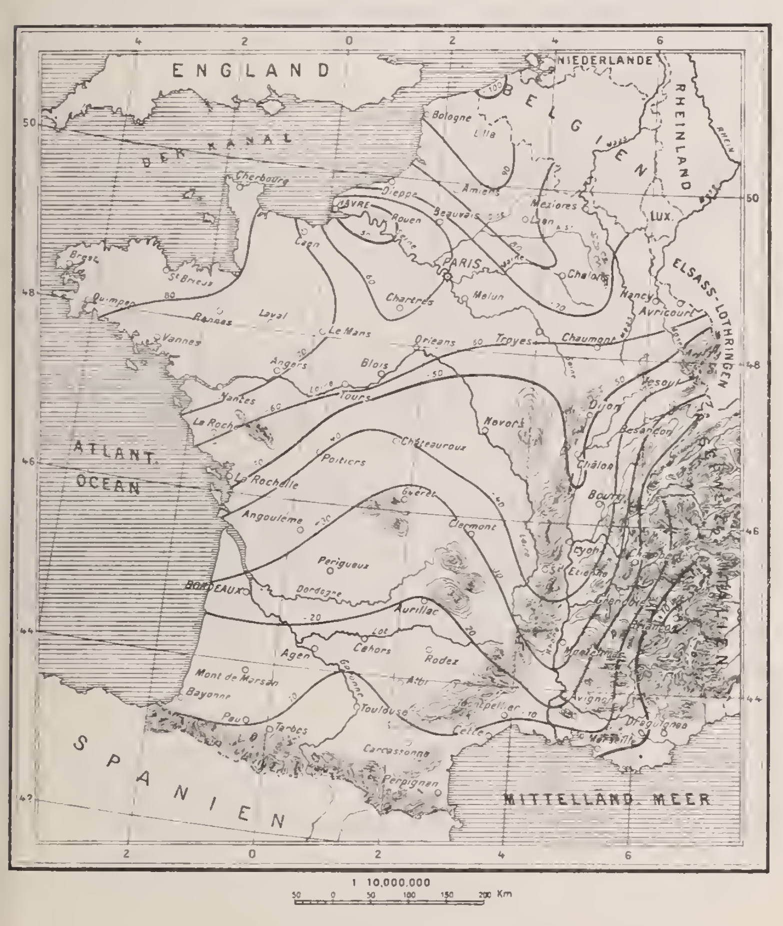
In Anbetracht ihrer Größe und ihres systematischen Charakters können diese Unterschiede nicht mehr als Folge von einseitigen Messungsfehlern des einen oder anderen der beiden Nivellements aufgefaßt werden.

Sie müssen vielmehr größtenteils durch fortschreitende Bodensenkungen erklärt werden, deren Zusammenhang mit der Gebirgsbildung schon ein flüchtiger Blick auf das nebenstehende orographische Kärtchen von Frankreich zeigt, in welchem die Linien gleicher Bodensenkung (Isokatabasen) mit 10 cm Höhenabstand dargestellt sind, die in ihrem Verlauf eine Trog- oder Muldenbildung deutlich erkennen lassen, deren Achse in der Richtung des Rhonetales liegt und deren östlicher Flügel durch die Gebirgsmassen der Alpen und des Jura gebildet wird.

Das Senkungsfeld beginnt südlich am Fuße der Pyrenäenkette und wird gegen Osten durch Alpen und Jura begrenzt, während es sich westlich über das französische Zentralplateau ausdehnt und sich nach Norden bis an das Seinebecken und den Kanal La Manche erstreckt.

Der bekannte Geologe Geheimrat Professor Dr. Emanuel Kayser hat sich über die wissenschaftliche Erklärung der erwähnten regionalen Senkungsvorgänge auf mein Ersuchen wie folgt geäußert:

„Ich teile vollständig Ihre Meinung, daß die Abweichungen der neuen von den alten Höhenmessungen in Frankreich nichts weniger als Beobachtungsfehler sind, sondern eine wirkliche und zwar sehr große Bedeutung besitzen. Man erkennt sofort, daß die Höhenlage der großen tertiären



Linien gleicher Bodensenkung (Isokatabasen) in Frankreich.

Faltungsgebirge der Alpen und Pyrenäen unverändert geblieben ist — die Alpen weisen sogar eine geringe Hebung auf — daß das ganze übrige Frankreich aber einer Senkung unterliegt, die um so stärker ist, je näher man der Nordseeküste kommt.

Dies stimmt durchaus mit der längst bekannten, seit der Postglazialzeit eingetretenen und bis heute andauernden säkulären Senkung der ganzen nordfranzösischen, wie auch der niederländischen Küste überein.

Sehr bedeutsam ist ferner die starke Ausbuchtung nach Süden, welche die im allgemeinen west-östlich verlaufenden Senkungslinien im Rhone- und Saonnetale zwischen Dijon und Montpellier zeigen, d. h. in jener breiten Senke zwischen Alpen, Jura und französischem Zentralplateau, die in jeder Hinsicht ein Gegenstück unseres mittelrheinischen Grabens bildet.“

Die Zuverlässigkeit der zur Feststellung der vorerwähnten Höhenänderungen benutzten Messungen ist durch umfangreiche Veröffentlichungen erwiesen, die in den Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Paris und in einer ganzen Reihe von Jahrgängen der Verhandlungen der Konferenzen der Internationalen Erdmessung enthalten sind.

München im Januar 1922.

Bemerkungen zu Sätzen der Gaußschen theoria combinationis observationum.

Von **Georg Faber.**

Vorgetragen in der Sitzung am 14. Januar 1922.

$\varphi(x)$ bezeichne im folgenden stets eine nie zunehmende Funktion der positiven Veränderlichen x; die Kurve $y = \varphi(x)$ stellen wir uns in einem rechtwinkeligen Koordinatensystem vor, Parallele zur X-Achse nennen wir auch horizontal, Parallele zur Y-Achse vertikal, die Achse der positiven x sei von links nach rechts gerichtet. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der absolute Betrag eines Beobachtungsfehlers zwischen den Grenzen α, β liege, wo $0 < \alpha < \beta$, werde durch

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx \tag{1}$$

gemessen. Wir wollen gelegentlich zulassen, daß der Fehler Null unendlich vielmal wahrscheinlicher sei als jeder andere, so daß ihm allein eine endliche Wahrscheinlichkeit w_0 zukommt.

Dann ist

$$w_0 + \int_0^\infty \varphi(x)\,dx = 1; \tag{2}$$

im allgemeinen jedoch setzen wir $w_0 = 0$ voraus. Ferner werden folgende Bezeichnungen benutzt:

$$K_n = \int_0^\infty x^n \varphi(x)\,dx, \tag{3}$$

$$k_n = K_n^{\frac{1}{n}} \quad (> 0); \tag{4}$$

n ist positiv, aber nicht notwendig ganzzahlig gedacht. $\varphi(x)$ soll mit $1/x$ rasch genug gegen Null konvergieren, daß alle diese Integrale einen Sinn haben; häufig wird von einem gewissen x ab $\varphi(x) \equiv 0$ sein. Wir setzen noch zur Abkürzung

$$5) \qquad z(x) = w_0 + \int_0^x \varphi(x)\, dx.$$

Im 10. art. der theoria combinationis observationum beweist Gauß folgenden Lehrsatz, den er selbst als theorema insigne bezeichnet[1]):

Es ist stets

$$6) \qquad x < 3^{1/2} k_2 z(x), \qquad \text{falls } z(x) < \tfrac{2}{3};$$

$$7) \qquad x < \frac{2 k_2}{3(1 - z(x))^{1/2}}, \qquad \text{falls } z(x) > \tfrac{2}{3}.$$

Gauß hat beim Beweise dieses Satzes die Spuren seiner Erfindung, wie er auch sonst zu tun pflegte, möglichst verwischt, und der Leser bleibt daher unbefriedigt, wenn es ihm nicht gelingt, das Gefüge des überall glatt verputzten Bauwerks bloßzulegen. Im vorliegenden Fall ist das nicht schwierig und geschah durch Winckler[2]); dieser Mathematiker fand bei dieser Gelegenheit zugleich die folgende Verallgemeinerung des Gaußschen Satzes:

$$8) \qquad x < (m+1)^{\frac{1}{m}} k_m z(x), \qquad \text{falls } z(x) < \frac{m}{m+1};$$

$$9) \qquad x < \frac{m k_m}{(m+1)(1 - z(x))^{\frac{1}{m}}}, \qquad \text{falls } z(x) > \frac{m}{m+1}.$$

Für $m = 2$ erhält man das Gaußsche Ergebnis.

Einen anderen Satz, nämlich daß stets

$$10) \qquad 5 K_4 \geqq (3 K_2)^2$$

ist, hat Gauß im 11. art. ohne Beweis mitgeteilt.

[1]) Gauß, Werke, Bd. 4; Comm. soc. sient. reg. Gotting. 1823.
[2]) Sitzungsber. der Wiener Akad., Bd. 53 (1866).

Bei Winckler a. a. O. findet sich die allgemeinere Ungleichung:

$$[(n+1)K_n]^m > [(m+1)K_m]^n \text{ für } n > m, \tag{11}$$

die für $m = 2$, $n = 4$ in den Gaußschen Satz (10) übergeht. Der Wincklersche Beweis für (11) ist jedoch falsch und, wie es scheint, nicht verbesserungsfähig.

Im Jahre 1896 beschäftigte sich Herr Krüger in den Nachrichten der Göttinger Ges. d. Wiss. mit den beiden Gaußschen Sätzen (6), (7) und (10), ohne die Wincklersche Abhandlung zu kennen. Er beweist zunächst genau wie Winckler dessen Verallgemeinerung (8), (9) des Gaußschen Satzes (6), (7). Sodann beweist er (10); es ist erstaunlich, daß dieser einfache und merkwürdige Gaußsche Satz erst mehr als ein halbes Jahrhundert nach seiner Veröffentlichung mit einem Beweise versehen wurde. Herr Krüger verallgemeinert auch, ganz ähnlich wie Winckler das Gaußsche Ergebnis, jedoch nicht bis zu der Wincklerschen Formel (11), von der er vielmehr nur die besonderen Fälle $n = 2m$, und $m = 2$, $n = 2^p$ beweist.

Alle erwähnten Beweise und Beweisversuche schließen sich eng an den von Gauß für (6), (7) benutzten Gedankengang an und bedürfen eines ziemlichen Aufwandes von Rechnung. Durch Einführung anders gearteter Überlegungen in diesen Aufgabenkreis lassen sich, wie ich zeigen will, die erwähnten Sätze und andere, die neu sind, mit großer Einfachheit und Anschaulichkeit beweisen. Ich beginne mit dem Beweise des in seiner Allgemeinheit immer noch unbewiesenen Wincklerschen Satzes (11).

Es sei eine den eingangs aufgestellten Bedingungen genügende Fehlerkurve C_1:

$$y = \varphi(x) \tag{12}$$

mit $w_0 = 0$ und der zugehörige Wert

$$K_m = \int_0^\infty x^m \varphi(x)\, dx \tag{13}$$

gegeben. Daneben betrachte ich eine zweite Fehlerkurve C_2: $y = \varphi_2(x)$, wo

14) $$\varphi_2(x) = h \text{ (konstant), falls } 0 < x < a;$$
$$\varphi_2(x) = 0, \text{ falls } x > a.$$

C_2 besteht also aus einer horizontalen Strecke; doch wollen wir auch das Stück der vertikalen Geraden $x = a$ zwischen $y = 0$ und $y = h$ mit zu dieser Fehlerkurve C_2 rechnen; die entstehende „Stufe" besteht also aus einem horizontalen und aus einem vertikalen Stück. (Auch an einer etwa vorhandenen Sprungstelle x_1 der gegebenen Funktion $\varphi(x)$ würden wir ein vertikales die beiden Punkte $x_1, \varphi(x_1 - 0)$ und $x_1, \varphi(x_1 + 0)$ verbindendes Geradenstück einfügen. Unsere Fehlerkurven sind somit ununterbrochene Kurvenzüge, welche einen Punkt der Y-Achse mit einem Punkte der X-Achse, der auch $x = \infty$ sein kann, verbinden.)

Die in (14) noch vorkommenden Konstanten a, h bestimmen wir durch die Forderungen, erstens daß für C_2 die Konstante $w_0 = 0$, d. h. daß

15) $$a h = 1$$

sein soll, und zweitens, daß das m^{te} Moment für C_2:

16) $$h \int_0^a x^m \, dx = K_m,$$

d. h. ebenso groß wie für C_1 sein soll; es wird also

17) $$\frac{h a^{m+1}}{m+1} = K_m$$

oder

18) $$\frac{a^m}{m+1} = K_m.$$

Wegen der Monotonie der Funktion $\varphi(x)$ können die Kurven C_1, C_2 einander in höchstens zwei Punkten schneiden. Man sieht leicht ein, daß diese zwei möglichen Schnittpunkte tatsächlich vorhanden sind. Es folgt dies auch aus dem nachstehenden Hilfssatze, den wir nachher nochmals brauchen wer-

den, dessen Beweis ich aber auf den Schluß dieser Mitteilung verschiebe.

Hilfssatz I: Ist die Funktion $F(a)$ definiert durch

$$F(a) = \int_0^\infty x^a \psi(x)\, dx, \tag{19}$$

so hat die Funktion $\psi(x)$ mindestens eben so viele positive Nullstellen mit Zeichenwechsel als die Funktion $F(a)$ Nullstellen ≥ 0 besitzt. (Eine Sprungstelle x_1 der Funktion $\psi(x)$ ist als Nullstelle mit Zeichenwechsel mitzuzählen, wenn $\psi(x_1 + 0)$ und $\psi(x_1 - 0)$ verschiedene Vorzeichen haben.)

Wählt man für $\psi(x)$ die Differenz $\varphi(x) - \varphi_2(x)$ der Funktionen (12), (14), wird $F(a) = 0$ für $a = 0$ und $a = m$, woraus sich nach dem Hilfssatze die zwei Schnittpunkte der Kurven C_1, C_2 ergeben. Da aber, wie bemerkt, diese Kurven keinen dritten Punkt gemein haben können, so kann (wieder auf Grund des Hilfssatzes) die Funktion

$$F(a) = \int_0^\infty (\varphi(x) - \varphi_2(x))\, x^a\, dx \tag{20}$$

keine weiteren Nullstellen außer $a = 0$ und $a = m$ besitzen. Die Funktion $F(a)$ ist also, so weit sie für $a > m$ existiert, von einerlei Vorzeichen und zwar positiv, denn für hinreichend große a hat $F(a)$ das Vorzeichen von

$$\int_a^\infty (\varphi(x) - \varphi_2(x))\, x^a\, dx = \int_a^\infty \varphi(x)\, x^a\, dx. \tag{21}$$

Ist also $n > m$ und existiert das Moment

$$K_n = \int_0^\infty \varphi(x)\, x^n\, dx, \tag{22}$$

so wird

$$K_n > \int_0^\infty \varphi_2(x)\, x^n\, dx = \frac{h a^{n+1}}{n+1} = \frac{a^n}{n+1} = \frac{\left(\sqrt[m]{(m+1)K_m}\right)^n}{n+1} \tag{23}$$

oder

$$[(n+1)K_n]^m > [(m+1)K_m]^n. \tag{24}$$

Das ist aber die Wincklersche Ungleichung; nur wenn $\varphi(x)$ mit $\varphi_2(x)$ identisch ist, ist das Zeichen $>$ in (24) durch $=$ zu ersetzen.

Da die Kurve $y = \varphi(x)$ von $x = 0$ ab zuerst oberhalb der Kurve $y = \varphi_2(x)$ (14) verläuft, so gilt für hinreichend kleine x:

$$25)\qquad z(x) > xh = \frac{x}{a} = \frac{x}{(m+1)^{\frac{1}{m}} k_m}$$

oder

$$26)\qquad x < (m+1)^{\frac{1}{m}} k_m z(x).$$

Um den Giltigkeitsbereich dieser Ungleichung genau abzugrenzen, wollen wir die Kurve $y = \varphi(x)$ unter Festhaltung ihres Moments K_m so variieren, daß die Gleichung

$$27)\qquad \int_0^x \varphi(x)\,dx = \int_0^x \varphi_2(x)\,dx$$

oder

$$28)\qquad z(x) = xh$$

für einen möglichst kleinen Wert $x = x_1$ erfüllt ist; dann gilt (25), (26) immer für $x < x_1$.

Wir gehen zuerst von irgend einer (noch nicht variierten) von $y = \varphi_2(x)$ verschiedenen Kurve $y = \varphi(x)$ aus und nennen die einzige offenbar vorhandene Wurzel der Gleichung (27) oder (28) x_2. Das Stück der Kurve $y = \varphi(x)$ rechts von $x = x_2$ ersetzen wir durch eine Stufe

$$29)\qquad y = \varphi_3(x), \text{ wo}$$

$$30)\qquad \begin{cases} \varphi_3(x) = k \text{ (konstant), falls } x_2 < x < b, \\ \varphi_3(x) = 0 \qquad\qquad\quad\ \text{„} \quad x > b, \end{cases}$$

und wo die Konstanten $k > 0$ und $b > x_2$ durch die Bedingungen

$$31)\qquad \int_{x_2}^{b} \varphi_3(x)\,dx = \int_{x_2}^{\infty} \varphi(x)\,dx,$$

$$32)\qquad \int_{x_2}^{b} x^m \varphi_3(x)\,dx = \int_{x_2}^{\infty} x^m \varphi(x)\,dx$$

bestimmt sind, und zwar offenbar eindeutig (vgl. (15), (16)).

Genau wie sich vorhin, S. 11, $\varphi(+0) > h$ ergab, ergibt sich jetzt $\varphi(x_2+0) > k$ und daher auch $\varphi(x_2-0) > k$ (nur, falls für $x > x_2$ von vornherein $\varphi_3(x) \equiv \varphi(x)$ war, muß in der ersten und kann in der zweiten dieser Ungleichungen $=$ statt $>$ stehen). Nun ersetzen wir auch links von $x = x_2$ die Kurve $y = \varphi(x)$ durch $y = k$; die so entstehende Kurve nennen wir $y = \varphi_4(x)$. Es ist also

$$33)\qquad \begin{cases} \varphi_4(x) = k \text{ für } 0 < x < b \text{ und} \\ \varphi_4(x) = 0 \text{ für } x > b. \end{cases}$$

Falls nicht etwa von vornherein $\varphi(x)$ mit $\varphi_4(x)$ identisch war, ist sowohl

$$34)\qquad \int_0^{\infty} \varphi_4(x)\,dx < \int_0^{\infty} \varphi(x)\,dx = 1,$$

als auch

$$35)\qquad \int_0^{\infty} \varphi_4(x)\,x^m\,dx < \int_0^{\infty} \varphi(x)\,x^m\,dx = K_m.$$

Die Ungleichung (34) kann man in eine Gleichung verwandeln, wenn man die in der Definition (33) von $\varphi_4(x)$ vorkommende Konstante b durch eine größere c ersetzt. Die so aus $\varphi_4(x)$ entstehende Funktion möge $\varphi_5(x)$ heißen. Da bei den letzten Variationen, die von $\varphi_3(x)$ zu $\varphi_5(x)$ führten, Fehlern $> x_2$ auf Kosten von Fehlern $< x_2$ eine größere Wahrscheinlichkeit zuerteilt wurde, ist

$$36)\qquad k\int_0^{c} x^m\,dx > K_m,$$

andererseits besagt (35):

$$37)\qquad k\int_0^{b} x^m\,dx < K_m.$$

Mithin gibt es eine Zahl d zwischen b und c, für die

$$38)\qquad k\int_0^d x^m\,dx = K_m$$

wird. Für $y = \varphi_6(x)$, wo

$$39)\qquad \begin{cases} \varphi_6(x) = k, & \text{falls } 0 < x < d; \\ \varphi_6(x) = 0, & \text{falls } x > d \end{cases}$$

ist somit die Bedingung, daß der Wert des Moments K_m festgehalten werden soll, erfüllt. Dagegen ist wegen $d < c$:

$$40)\qquad \int_0^\infty \varphi_6(x)\,dx = kd < 1\,.$$

Wir erteilen daher dem Fehler Null noch die endliche Wahrscheinlichkeit

$$41)\qquad w_0 = 1 - kd.$$

Nun ist, da, wie schon hervorgehoben, bei dem Fehlergesetz φ_6 Fehler $> x_2$ wahrscheinlicher sind als bei dem ursprünglichen Fehlergesetz φ:

$$42)\qquad w_0 + \int_0^{x_2} \varphi_6(x)\,dx < \int_0^{x_2} \varphi(x)\,dx = hx_2\,.$$

Die Gleichung

$$43)\qquad w_0 + \int_0^x \varphi_6(x)\,dx = hx$$

oder

$$44)\qquad w_0 + kx = hx$$

hat daher eine Lösung

$$45)\qquad \xi = \frac{w_0}{h-k}, \text{ die } < x_2 \text{ ist.}$$

Hier ersetzen wir w_0 durch seinen Wert $1 - kd$ und beachten, daß nach (38)

$$kd^{m+1} = ha^{m+1} \tag{46}$$

ist, wodurch sich

$$w_0 = 1 - \frac{ha^{m+1}}{d^m} \text{ und}$$

$$\xi = \frac{1 - \frac{a^m}{d^m}}{\frac{1}{a} - \frac{a^m}{d^{m+1}}} = \frac{d^{m+1} - a^m d}{d^{m+1} - a^{m+1}} a. \tag{47}$$

a ist konstant $= k_m(m+1)^{\frac{1}{m}}$. d kann je nach der Wahl der Ausgangskurve $y = \varphi(x)$, die wir als verschieden von der S. 10 mit $y = \varphi_2(x)$ bezeichneten Kurve annahmen, verschieden ausfallen, ist aber wegen (46), und da $k < h$ ist, stets $> a$. Die auf der rechten Seite von (47) stehende Funktion von d wächst mit d; ξ nimmt daher seinen kleinst möglichen Wert, nämlich $a \frac{m}{m+1}$ für $d = a + 0$ an. Um so mehr ist die Wurzel x_1 der Gleichung (28) $> a \frac{m}{m+1}$, mithin $z(x_1) = hx_1 > ah \frac{m}{m+1}$, d. h. $z(x_1) > \frac{m}{m+1}$.

Während also für die S. 10 mit $y = \varphi_2(x)$ bezeichnete Fehlerkurve stets

$$x = k_m(m+1)^{\frac{1}{m}} z(x) \tag{48}$$

ist, ist für jede andere Fehlerkurve

$$x < k_m(m+1)^{\frac{1}{m}} z(x) = \frac{z(x)}{h}, \tag{49}$$

so lange $z(x) < \frac{m}{m+1}$ ist. Damit ist (8) bewiesen.

Da die Kurve $C_1 : y = \varphi(x)$, auch das vertikale Stück der Kurve C_2 durchsetzt, ist $z(a) < ah (= 1)$, also nach (49) $z(a) > \frac{m}{m+1}$. Somit gilt folgender Satz:

$\int\limits_a^\infty \varphi(x)\,dx$, wo $a = k_m(m+1)^{\frac{1}{m}}$ ist, falls $\varphi(x)$ mit $\varphi_2(x)$ zusammenfällt, $= 0$, sonst stets > 0, aber $< \frac{1}{m+1}$.

Die hier angegebene obere Schranke $\frac{1}{m+1}$ läßt sich noch verbessern; die genaue obere Grenze ist

$$\frac{1}{m}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{m+1}. \tag{50}$$

Will man nämlich durch Variation von $\varphi(x)$ unter Festhaltung des Moments K_m den Integralwert $\int\limits_a^\infty \varphi(x)\,dx$ vergrößern, so wird man zunächst (genau wie S. 12 geschehen, nur daß jetzt a an Stelle von x_2 tritt) k' und b' so bestimmen, daß

$$(b'-a)\,k' = \int\limits_a^\infty \varphi(x)\,dx \tag{51}$$

und

$$k'\int\limits_a^{b'} x^m\,dx = \int\limits_a^\infty x^m\,\varphi(x)\,dx \tag{52}$$

wird. Sodann wird man $d' > b'$ so bestimmen, daß

$$k'\int\limits_0^{d'} x^m\,dx = \int\limits_0^\infty x^m\,\varphi(x)\,dx \tag{53}$$

wird: dann wird, falls man $\bar\varphi(x)$ durch die Gleichungen

$$\begin{cases} \bar\varphi(x) = k' \text{ für } 0 \leq x < d', \\ \bar\varphi(x) = 0 \text{ für } x > d' \end{cases} \tag{54}$$

definiert,

$$\begin{aligned} \int\limits_a^\infty \bar\varphi(x)\,dx &= (d'-a)\,k' \\ &> \int\limits_a^\infty \varphi(x)\,dx. \end{aligned} \tag{55}$$

Da nach (53):

$$k' d'^{m+1} = h a^{m+1} = a^m, \tag{56}$$

$$k' = \frac{a^m}{d'^{m+1}} \tag{57}$$

ist, kann man diese Beziehung (55) auch so schreiben:

$$\int_a^\infty \varphi(x)\, dx \leq a^m \frac{d' - a}{d'^{m+1}} \qquad (d' > a). \tag{58}$$

Die rechte Seite nimmt für $d' = a \frac{m+1}{m}$ ihren größten Wert $\left(\frac{m}{m+1}\right)^{m+1} \frac{1}{m}$ an; es ist also für jede Fehlerfunktion $\varphi(x)$:

$$\int_a^\infty \varphi(x)\, dx \leq \frac{1}{m} \left(\frac{m}{m+1}\right)^{m+1} \tag{59}$$

und das Gleichheitszeichen gilt hier nur für eine bestimmte stufenförmige Fehlerkurve $y = \varphi(x)$ mit $w_0 > 0$; damit ist (50) als genaue obere Grenze nachgewiesen.

Ist x_0 ein beliebiger Wert, für den $z(x_0) < 1$ ist, so ersetze man, wie nun schon mehrfach geschehen, die Kurve $y = \varphi(x)$ rechts von $x = x_0$ unter Festhaltung des Moments K_m und des Flächeninhalts $K_0 = \int_0^\infty \varphi(x)\, dx = 1$ durch eine Stufe der Höhe k'' und der Länge $b'' - x_0$; dann ist also

$$(b'' - x_0) k'' = 1 - z(x_0) \tag{60}$$

Das Moment

$$k'' \int_0^{b''} x^m\, dx \tag{61}$$

wird dann sicher $\leq K_m$; hier substituieren wir aus (60) den Wert

$$k'' = \frac{1 - z(x_0)}{b'' - x_0} \tag{62}$$

und erhalten, wenn wir noch βx_0 für b'' schreiben,

63) $$\frac{[1 - z(x_0)]\, x_0^m \beta^{m+1}}{\beta - 1} \leq (m + 1) K_m .$$

Die linke Seite nimmt für $\beta = \frac{m+1}{m}$ ihren kleinsten Wert an und es ist also um so mehr

64) $$x_0 < \frac{m k_m}{(m+1)(1 - z(x_0))^{\frac{1}{m}}}.$$

Damit ist Ungleichung (9) bewiesen und zwar ohne einschränkende Nebenbedingung bezüglich $z(x_0)$: doch gibt (8), falls $z(x_0) < \frac{m}{m+1}$, eine bessere Abschätzung.

Wir haben noch den Beweis des Hilfssatzes I von S. 11 nachzutragen und beweisen zu dessen Vorbereitung zunächst drei andere Hilfssätze.

Hilfssatz II (Verallgemeinerung der Descartesschen Zeichenregel): Sind

65) $$a_0 > a_1 > \cdots > a_r$$

reelle Exponenten und $A_0, A_1, \ldots A_r$ reelle von Null verschiedene Koeffizienten, so hat der $(r + 1)$gliedrige Ausdruck

66) $$f(x) = A_0 x^{a_0} + A_1 x^{a_1} + \cdots + A_r x^{a_r}$$

höchstens so viele positive Nullstellen, als in der Folge $A_0, A_1, \ldots A_r$ Zeichenwechsel vorkommen.

Die Anzahl dieser Wechsel sei $w (\leq r)$; p sei die Anzahl der positiven Nullstellen der Funktion (66). Aus $w = 0$ folgt selbstverständlich $p = 0$. Wir nehmen daher $w > 0$ an und zeigen, daß dann die weitere Annahme $p > w$ auf einen Widerspruch führt.

Es seien etwa die Koeffizienten A_k und A_{k+1} verschieden bezeichnet; wählt man dann den Exponenten μ so, daß jede der Summen $a_0 + \mu$, $a_1 + \mu$, ... $a_k + \mu$ positiv, dagegen jede der Summen $a_{k+1} + \mu$, $a_{k+2} + \mu$, ... $a_r + \mu$ negativ wird, so hat der $(r + 1)$ gliedrige Ausdruck

67) $$f_1(x) = \frac{d\,x^\mu f(x)}{d\,x} = B_0 x^{\beta_0} + B_1 x^{\beta_1} + \cdots B_r x^{\beta_r}$$

mindestens $p-1$ positive Nullstellen; die Folge $B_0, B_1, \ldots B_r$ dagegen hat (falls wieder die Anordnung $\beta_0 > \beta_1 > \cdots > \beta_r$ hergestellt wurde) genau $w-1$ Zeichenwechsel. So wie $f_1(x)$ aus $f(x)$ gebildet wurde, kann man, wenn $w-1>0$ ist, aus $f_1(x)$ einen $(r+1)$ gliedrigen Ausdruck $f_2(x)$ bilden, der mindestens $p-2$ positive Nullstellen besitzt und genau $w-2$ Zeichenwechsel in seinen Koeffizienten aufweist. Schließlich käme man so zu einem Ausdruck $f_w(x)$ mit der positiven Anzahl $(p-w)$ oder einer größeren Anzahl positiver Nullstellen, aber mit lauter gleichbezeichneten Koeffizienten, was unmöglich ist.

Wir benutzen nachher nur folgenden besonderen Fall des Hilfssatzes II:

Die Funktion (66) hat höchstens r positive Nullstellen.

Auf Grund dieses Satzes ergibt sich leicht der folgende

Hilfssatz III: Sind $x_1, x_2, \ldots x_r$ r gegebene voneinander verschiedene positive Zahlen und gilt (65), so kann man in eindeutiger Weise für $A_1, A_2, \ldots A_r$ reelle von Null verschiedene Zahlen finden, der Art, daß

68) $$f(x) = x^{\alpha_0} + A_1 x^{\alpha_1} + \cdots + A_r x^{\alpha_r}$$

für $x = x_1, x_2, \ldots x_r$ verschwindet.

Löst man nämlich die r linearen Gleichungen

69) $$0 = x_i^{\alpha_0} + A_1 x_i^{\alpha_1} + \cdots + A_r x_i^{\alpha_r}$$

$(i = 1, 2, \ldots r)$ nach $A_1, A_2, \ldots A_r$ auf, so erhält man die A_s als Quotienten von Determinanten, deren keine einzige, wie leicht zu zeigen ist, verschwindet. Denn faßt man irgend eine dieser Determinanten als Funktion $F(x_1)$ der für einen Augenblick als veränderlich zu denkenden Größe x_1 auf, so verschwindet die r gliedrige Funktion $F(x_1)$ an der $r-1$ Stellen $x_1 = x_2, x_3, \ldots x_r$, kann also nach Hilfssatz II nicht verschwinden, wenn x_1, so wie es nach Voraussetzung geschehen

soll, einen von $x_2, x_3, \ldots x_r$ verschiedenen Wert annimmt, es sei denn, daß $F(x_1)$ identisch verschwindet, d. h. daß alle Koeffizienten von $F(x_1)$ Null sind. Das würde aber besagen, daß gewisse $(r-1)$ gliedrige Ausdrücke für mehr als $r-2$ Werte also identisch verschwinden. Schließlich käme man zu dem Widerspruch, daß eingliedrige Ausdrücke wie $x_r^{a_k}$ verschwinden.

Endlich beweisen wir noch den

Hilfssatz IV: Hat die $(r+1)$gliedrige Funktion (66) r positive Nullstellen, so wechselt sie jedesmal das Vorzeichen, wenn x durch eine dieser Nullstellen hindurchgeht. (Es wäre leicht, noch etwas allgemeiner zu zeigen, daß jede dieser r Nullstellen eine einfache sein muß und daß in der Aussage des Hilfssatzes II die Nullstellen mit ihrer Multiplizität gezählt werden dürfen.)

Es ist erlaubt, beim Beweise außer der Voraussetzung (65) noch die zu machen, daß $a_0 = 0$ ist, weil man ja $f(x)$ andernfalls durch $f(x)\,x^{-a_0}$ ersetzen dürfte. Hätte dann aber die Funktion $f(x)$ unter ihren r Nullstellen auch nur eine ohne Zeichenwechsel, so hätte die $r$gliedrige Funktion $f'(x)$ mindestens r Nullstellen im Widerspruch mit Hilfssatz II.

Den Hilfssatz I von S. 11 können wir auch so fassen:

Hat die Funktion $\psi(x)$ nicht mehr als r verschiedene positive Nullstellen mit Zeichenwechsel: $x_1, x_2, \ldots, x_r$, so kann die Funktion

$$70) \qquad F(a) = \int_0^\infty \psi(x)\, x^a\, dx$$

nicht $r+1$ verschiedene Nullstellen $a_0, a_1, \ldots a_r$ besitzen. Wäre dies nämlich doch der Fall, so wäre auch

$$71) \qquad \int_0^\infty \psi(x)\,(x^{a_0} + A_1 x^{a_1} + \cdots + A_r x^{a_r})\, dx = 0,$$

mit willkürlichen Koeffizienten $A_1, A_2, \ldots A_r$. Wählt man diese aber nach Hilfssatz III so, daß $x^{a_0} + A_1 x^{a_1} + \cdots + A_r x^{a_r} = 0$ wird für $x = x_1, x_2, \ldots x_r$, so hat nach Hilfs-

satz IV die Funktion $\psi(x)\,(x^{\alpha_0} + A_1 x^{\alpha_1} + \cdots + A_r x^{\alpha_r})$ für alle positiven x einerlei Vorzeichen und daher ist Gleichung (71) unmöglich.

Mittels des im Vorstehenden auseinander gesetzten Beweisverfahrens lassen sich noch zahlreiche zum gleichen Gedankenkreis gehörige Sätze ableiten, welche die Kenntnis mehrerer Momente K voraussetzen und auf Grund dieser Kenntnis Beschränkungen des Verlaufs der Kurve $y = \varphi(x)$ oder der Werte der übrigen Momente K_p behaupten. Ich erwähne als Beispiel den folgenden: es ist, falls $l < m < n$:

$$72)\quad [(n+1)K_n]^{l-m}\,[(m+1)K_m]^{n-l}\,[(l+1)K_l]^{m-n} \leq 1;$$

für $l = 0$ geht diese Formel in (11) über.



Integration der partiellen Gleichung $s = \sin z$.

Von **F. Lindemann.**

Vorgelegt in der Sitzung am 14. Januar 1922.

1. Das Quadrat des Linienelements einer Fläche von konstantem negativen Krümmungsmaße -1 läßt sich bekanntlich in der Form

$$ds^2 = \cos^2 w \cdot du^2 + \sin^2 w \cdot dv^2 \tag{1}$$

darstellen, wo u und v die Parameter die Krümmungslinien bedeuten; die Hauptkrümmungshalbmesser sind dann

$$R_1 = -\operatorname{tg} w, \qquad R_2 = \operatorname{cotg} w, \tag{2}$$

während w der partiellen Gleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = \tfrac{1}{2} \sin 2w \tag{3}$$

genügen muß, die durch die Substitution $p = u + v$, $q = u - v$ in die Form $4 \dfrac{\partial^2 (2w)}{\partial p\, \partial q} = \sin 2w$ gebracht wird.

Da auf Grund meiner Abhandlung über die Biegungsflächen einer gegebenen Fläche[1]) alle Flächen konstanter Krümmung angegeben werden können, so ist damit auch das allgemeine Integral der partiellen Gleichung (3) bekannt. Die noch nötigen Rechnungen lassen sich leichter durchführen,

[1]) Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, math.-phys. Klasse, Bd. XXIX, 3, München 1921. Diese Arbeit wird im folgenden kurz als Abhandlung zitiert.

wenn man von Flächen mit der konstanten Krümmung + 1 ausgeht. Man hat dann zu setzen[1]):

$$(4)\qquad R_1 = \frac{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}}{e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}}, \qquad R_2 = \frac{e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}}{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}},$$

$$ds^2 = \tfrac{1}{4}\left[(e^{\vartheta} + e^{-\vartheta})^2\, du^2 + (e^{\vartheta} - e^{-\vartheta})^2\, dv^2\right],$$

wobei u und v wieder die Parameter der Krümmungslinien bedeuten, und es ist:

$$(5)\qquad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} = \tfrac{1}{4}(e^{-2\vartheta} - e^{2\vartheta}),$$

eine Gleichung, die aus (3) hervorgeht, wenn man w durch $i\vartheta$ und v durch iv ersetzt.

2. Wir stellen kurz die wichtigsten Formeln der Abhandlung zusammen; wie dort in der Einladung bemerkt, kann man die Schlußformeln (83) leicht nachträglich bestätigen, wenn man kein Gewicht auf die Art der Ableitung legt. Gegeben sei also die Darstellung einer Fläche durch ihre Minimalkurven α, β in der (schon von Bour aufgestellten) Form:

$$(6)\qquad \begin{aligned} x &= i\int [W_\alpha \operatorname{cosin}\lambda\, d\alpha - W_\beta \operatorname{cosin}\mu\, d\beta], \\ y &= i\int [W_\alpha \sin\lambda\, d\alpha - W_\beta \sin\mu\, d\beta], \\ z &= \int [W_\alpha\, d\alpha + W_\beta\, d\beta]. \end{aligned}$$

Dann sind dx und dy vollständige Differentiale, sobald die Bedingungen:

$$(7)\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial\beta} = \operatorname{cotg}\frac{w}{2}\cdot\frac{\partial \lg W_\alpha}{\partial\beta}, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial\alpha} = -\operatorname{cotg}\frac{w}{2}\cdot\frac{\partial \lg W_\beta}{\partial\alpha}$$

erfüllt sind, wo $w = \lambda - \mu$ (vgl. a. a. O. den Schluß von § 2); und es folgt aus diesen beiden Gleichungen:

$$(8)\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha} = \frac{\partial w}{\partial\alpha} - \operatorname{cotg}\frac{w}{2}\cdot\frac{\partial \lg W_\beta}{\partial\alpha}, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial\beta} = -\frac{\partial w}{\partial\beta} + \operatorname{cotg}\frac{w}{2}\cdot\frac{\partial \lg W_\alpha}{\partial\beta},$$

und durch Differenzieren (§ 1 der Abhandlung):

$$(9)\qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\operatorname{cotg}\frac{w}{2}\cdot\frac{\partial \lg W_\alpha}{\partial\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\operatorname{cotg}\frac{w}{2}\cdot\frac{\partial \lg W_\beta}{\partial\alpha}\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial\beta}.$$

[1]) Vgl. z. B. Darboux, Leçons, t. 3, p. 385.

Die Fundamentalgröße F und das Krümmungsmaß K sind (a. a. O., § 2):

$$F = 2 \cdot \operatorname{cosin}^2 \frac{w}{2} \cdot W_\alpha W_\beta, \quad K = -\frac{\lambda_\alpha \mu_\beta - \lambda_\beta \mu_\alpha}{F \cdot \operatorname{cosin}^2 \frac{w}{2}} = -\frac{1}{F} \frac{\partial^2 \log F}{\partial \alpha \, \partial \beta} \text{ [1]}. \tag{10}$$

Nach einem in § 3 angegebenen Verfahren kann man aus den Gleichungen (7) und (9) die Funktion w eliminieren und statt derselben die Funktion F einführen; so wurde die auch von Bour aufgestellte Differentialgleichung

$$W_{\alpha\alpha} W_{\beta\beta} - W_{\alpha\beta}^2 + W_\alpha W_\beta \frac{F_\alpha F_\beta}{F^2} - W_{\alpha\alpha} W_\beta \frac{F_\beta}{F} - W_{\beta\beta} W_\alpha \frac{F_\alpha}{F} = \frac{\partial^2 \lg F}{\partial \alpha \, \partial \beta} (F - 2 W_\alpha W_\beta) \tag{11}$$

abgeleitet, die nichts anderes ist als ein besonderer Fall der allgemeinen Gleichung, welcher (nach Darboux und Enneper) die Koordinaten eines Flächenpunktes genügen müssen, wenn die drei Fundamentalgrößen E, F, G gegeben sind. Die Behauptung ist nun, daß ein Punkt ξ, η, ζ der allgemeinsten Biegungsfläche der Fläche (6) in folgender Form erhalten wird:

$$\begin{aligned} \xi &= \int [R \cdot \operatorname{cosin} \Phi \cdot W_\alpha \, d\alpha + R' \cdot \operatorname{cosin} \Psi \cdot W_\beta \, d\beta], \\ \eta &= \int [R \cdot \sin \Phi \cdot W_\alpha \, d\alpha + R' \cdot \sin \Psi \cdot W_\beta \cdot d\beta], \\ \zeta &= i \int [R \cdot W_\alpha \, d\alpha - R' \cdot W_\beta \, d\beta], \end{aligned} \tag{12}$$

wo Φ zu Ψ, R zu R' konjugiert sein soll. Der Beweis ist folgender: Damit $d\zeta$ ein vollständiges Differential sei, muß die Bedingung:

$$R_\beta W_\alpha + R'_\alpha W_\beta + (R + R') W_{\alpha\beta} = 0 \tag{13}$$

erfüllt sein; ferner sind $d\xi$ und $d\eta$ vollständige Differentiale infolge der beiden Bedingungen, die zu obigen Gleichungen (7) analog sind:

---

[1]) Die Identität beider Ausdrücke für K ist eine Folge des Gaußschen Satzes über die Determinante $DD'' - D'^2$; zum Beweise kann man sich auch der Gleichungen in § 3 der Abhandlung bedienen; vgl. unten den „Nachtrag".

(14) $\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} = \operatorname{cotg} \frac{\mathfrak{W}}{2} \cdot \frac{\partial \lg (R W_\alpha)}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} = -\operatorname{cotg} \frac{\mathfrak{W}}{2} \cdot \frac{\partial \lg R' W_\beta}{\partial \alpha},$

wo $\mathfrak{W} = \Phi - \Psi$, und aus denen sich die weiteren, zu (8) analogen Gleichungen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial \alpha} - \operatorname{cotg} \frac{\mathfrak{W}}{2} \frac{\partial \lg (R' W_\beta)}{\partial \alpha},$$
(14 a)
$$\frac{\partial \Psi}{\partial \beta} = -\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial \beta} + \operatorname{cotg} \frac{\mathfrak{W}}{2} \frac{\partial \lg (R W_\alpha)}{\partial \beta}$$

ergeben, die aber nichts neues aussagen, da sie einfach aus der Definition von $\mathfrak{W}$ folgen. Mit Hilfe derselben erhält man die zu (9) analoge Differentialgleichung:

(15) $$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\operatorname{cotg} \frac{\mathfrak{W}}{2} \cdot \frac{\partial \lg \zeta_\alpha}{\partial \beta}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\operatorname{cotg} \frac{\mathfrak{W}}{2} \cdot \frac{\partial \lg \zeta_\beta}{\partial \alpha}\right) = \frac{\partial^2 \mathfrak{W}}{\partial \alpha \, \partial \beta}.$$

Die Fundamentalgröße F^* und das Krümmungsmaß K^* der Fläche (12) werden nach (10):

(16) $$F^* = 2 \cdot \operatorname{cosin}^2 \frac{\mathfrak{W}}{2} \cdot \zeta_\alpha \zeta_\beta, \qquad K^* = -\frac{\Phi_\alpha \Psi_\beta - \Phi_\beta \Psi_\alpha}{F^* \cdot \operatorname{cosin}^2 \frac{\mathfrak{W}}{2}}.$$

Daß α, β die Parameter der Minimalkurven der Fläche (12) sind, ist evident. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Verbiegung der Fläche (12) auf die Fläche (6) ist also: $F = F^*$, oder:

(17) $$\operatorname{cosin}^2 w' = \operatorname{cosin}^2 \mathfrak{W}' \cdot R R',$$

wo zur Abkürzung $2 w' = w$, $2 \mathfrak{W}' = \mathfrak{W}$. Differentiert man (17) logarithmisch, so ergibt sich:

$$\operatorname{tg} w' \cdot (\lambda_\alpha - \mu_\alpha) = \operatorname{tg} \mathfrak{W}' \cdot (\Phi_\alpha - \Psi_\alpha) - \frac{\partial \lg R}{\partial \alpha} - \frac{\partial \lg R'}{\partial \alpha},$$
(18)
$$\operatorname{tg} w' \cdot (\lambda_\beta - \mu_\beta) = \operatorname{tg} \mathfrak{W}' \cdot (\Phi_\beta - \Psi_\beta) - \frac{\partial \lg R}{\partial \beta} - \frac{\partial \lg R'}{\partial \beta}.$$

Nun war nach (7): $W_{\alpha\beta} = W_\alpha \cdot \lambda_\beta \cdot \operatorname{tg} w' = -W_\beta \mu_\alpha \cdot \operatorname{tg} w'$. Infolgedessen lassen sich die Gleichungen (14) in der Form

$$(19)\quad \Phi_\alpha \operatorname{tg} \mathfrak{W}' - \lambda_\alpha \operatorname{tg} w' = \frac{\partial \lg R}{\partial \alpha}, \quad \Psi_\beta \operatorname{tg} \mathfrak{W}' - \mu_\beta \operatorname{tg} w' = -\frac{\partial \lg R'}{\partial \beta}$$

schreiben, und aus (18) ergeben sich dann die weiteren Relationen:

$$(19\text{a})\quad \Phi_\beta \operatorname{tg} \mathfrak{W}' - \lambda_\beta \operatorname{tg} w' = \frac{\partial \lg R}{\partial \beta}, \quad \Psi_\alpha \operatorname{tg} \mathfrak{W}' - \mu_\alpha \operatorname{tg} w' = -\frac{\partial \lg R'}{\partial \alpha}.$$

Die letzten Gleichungen sagen also nichts neues aus, wenn die Bedingung (17) erfüllt ist. Die Integrabilitätsbedingung der Gleichungen (19) und (19a) für Φ_α und Φ_β einerseits, für Ψ_α und Ψ_β andererseits muß sich also auf die eine Gleichung (17) reduzieren. Das ist in der Tat der Fall, denn durch Bildung von $\Phi_{\alpha\beta}$ und $\Psi_{\alpha\beta}$ findet man die Relation:

$$(20)\qquad \frac{\Phi_\alpha \Psi_\beta - \Phi_\beta \Psi_\alpha}{\operatorname{cosin}^2 \mathfrak{W}'} = \frac{\lambda_\alpha \mu_\beta - \lambda_\beta \mu_\alpha}{\operatorname{cosin}^2 w'},$$

welche nach (10), (16) und (17) aussagt, daß das Krümmungsmaß beider Flächen identisch ist, also dasselbe, was auch die Gleichung (17), d. h. $F = F^*$, aussagt. Die 4 Gleichungen (19) und (19a) sind die Gleichungen (79) der Abhandlung, die dort auf andere Weise abgeleitet wurden.

Um die allgemeinste Biegungsfläche von (6) in der Form (12) aufzustellen, hat man also folgende Schritte zu tun:

1. Man bestimme R, R' aus W mittels (13); es geschieht, indem man $R = U + iV$, $R' = U - iV$ setzt, U beliebig annimmt und V durch Quadratur berechnet; dann ist $d\zeta$ ein vollständiges Differential.
2. Man bestimme $\Phi - \Psi = \mathfrak{W} = 2\,\mathfrak{W}'$ aus (17) durch R, R' und w; dann ist $F^* = F$.
3. Man bestimme Φ und Ψ einzeln aus den Gleichungen (19); dann sind auch $d\xi$ und $d\eta$ vollständige Differentiale;

und damit ist die Aufgabe gelöst. Die Funktionen ξ, η, ζ sind hiernach verschiedene Formen der allgemeinen Lösung der Bourschen Differentialgleichung (11). Man könnte letztere auch wieder aus den Gleichungen (14) und (15) ableiten, wobei

die Rechnungen genau wie in § 3 der Abhandlung durchzuführen wären.

3. Bedeuten R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien der Fläche (6), so ist nach Gleichung (27) der Abhandlung, wo W_a durch $i R W_a$, W_β durch $-i R' W_\beta$, $W_{a\beta}$ durch $i(R_\beta W_a + R W_{a\beta}) = -i(R'_a W_\beta + R' W_{a\beta})$, w durch $\Phi - \Psi = \mathfrak{W}$, W durch $i \operatorname{tg}(a - \beta)$ zu ersetzen ist, unter Benutzung von (7) und (17):

$$(21)\quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 2\frac{R_\beta - R \operatorname{tg} w}{\sin \mathfrak{W} \cdot R R'} \cdot \operatorname{cosin}^2 w = 2 \cdot \frac{R_\beta - R \operatorname{tg} w}{\sin \mathfrak{W} \cdot \operatorname{cosin}^2 \mathfrak{W}'}.$$

Bezeichnet man also die rechte Seite mit M, so sind die Hauptkrümmungsradien der Fläche (12), da jetzt $R_1 R_2 = 1$ sein soll, die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(22)\qquad r^2 - M r + 1 = 0;$$

und auf Grund der Formeln (4) ist die allgemeine Lösung ϑ der Gleichung (5) aus den Gleichungen

$$(23)\qquad R_1 = i \operatorname{tg}(i\vartheta) \text{ oder } R_2 = -i \operatorname{cotg}(i\vartheta)$$

zu berechnen, wenn man noch die Parameter a, β durch die Parameter u, v ausgedrückt hat. Letzteres verlangt die Integration der Differentialgleichung der Krümmungslinien, die nach Lie durch Quadraturen geschehen kann[1]).

4. Nach Gleichung (26) der Abhandlung ist die Differentialgleichung der Krümmungslinien der Fläche (12)

$$(24)\qquad \frac{\partial \zeta}{\partial \beta}\frac{\partial \Psi}{\partial \beta} d\beta^2 + \frac{\partial \zeta}{\partial a}\frac{\partial \Phi}{\partial a} da^2 = 0,$$

wo Φ_a, Ψ_β aus (19) einzusetzen sind, und nach § 13 ist λ durch $\frac{\pi}{2} - 2\beta$, μ durch $\frac{\pi}{2} - 2a$, W durch $i \operatorname{tg}(a - \beta)$, w' durch $a - \beta$ zu ersetzen; es ergibt sich also:

$$(24\,a)\qquad i W_a \operatorname{cotg} \mathfrak{W}' \left(\frac{\partial R}{\partial a} da^2 - \frac{\partial R'}{\partial \beta} d\beta^2\right) = 0.$$

---

[1]) Vgl. Lie: Über Flächen, deren Krümmungsradien durch eine Relation verknüpft sind. Arch. for Mathem. og Naturvidenskab, Kristiania, Bd. 4, 1879.

Zur Integration kann man nach dem Vorgange von Bianchi[1]) in folgender Weise verfahren:

Es ist die linke Seite der Gleichung

$$\frac{1}{(EG - F^2)}[(ED' - FD)\,du^2 + (ED'' - GD)\,du\,dv + (FD'' - GD')\,dv^2]$$

eine quadratische Differentialform mit der Krümmung Null, kann also gleich $dy_1\,dy_2$ gesetzt werden. Berechnet man die Größen E, F, G, D, D', D'' nach § 2 der Abhandlung, so entsteht die linke Seite der Gleichung (24), und diese ist mit (24 a) identisch. Es ist daher:

$$N^2(R_\alpha\,d\alpha^2 - R'_\beta\,d\beta^2) = du\,dv, \tag{25}$$

wo $N^2 \cdot F^2 \cos^2(\alpha - \beta) = \operatorname{cotg} \mathfrak{W}'$, und

$$\begin{aligned} N \cdot du &= e^{\varkappa}\;(\sqrt{R_\alpha}\,d\alpha + \sqrt{R'_\beta}\,d\beta), \\ N \cdot dv &= e^{-\varkappa}(\sqrt{R_\alpha}\,d\alpha - \sqrt{R'_\beta}\,d\beta), \end{aligned} \tag{26}$$

wobei sich $\varkappa$ aus den Gleichungen:

$$B\frac{\partial\varkappa}{\partial\alpha} - A\frac{\partial\varkappa}{\partial\beta} = \frac{\partial A}{\partial\beta} - \frac{\partial B}{\partial\alpha},$$

$$-B\frac{\partial\varkappa}{\partial\alpha} - A\frac{\partial\varkappa}{\partial\beta} = -\frac{\partial B}{\partial\alpha} - \frac{\partial A}{\partial\beta}$$

oder:

$$A\frac{\partial\varkappa}{\partial\beta} = \frac{\partial B}{\partial\alpha}, \quad B\frac{\partial\varkappa}{\partial\alpha} = \frac{\partial A}{\partial\beta}$$

mittels einer Quadratur ergibt [wenn die linke Seite von (25) mit $A^2\,d\alpha^2 - B^2\,d\beta^2$ bezeichnet wird]. Durch weitere Quadraturen findet man die Parameter u, v der Krümmungslinien aus (26).

5. Die Integration der Differentialgleichung (5) erfordert also folgende Operationen: 1. man stelle die allgemeine Fläche konstanter Krümmung in der Form (12)

[1]) Vorlesungen über Differentialgeometrie, deutsch von Lukat, 2. Auflage, Leipzig 1910, S. 53 und 251 ff.

durch ihre Minimalkurven dar; 2. man berechne die Wurzeln R_1 und R_2 der Gleichung (22), wo M durch (21) definiert ist; 3. dann ist die Lösung ϑ aus (23) zu gewinnen, wenn man noch α, β mittels (26) durch die Parameter u, v der Krümmungslinien ausdrückt.

Nachtrag.

6. Die obige Gleichung (10) für das Krümmungsmaß K erhält man aus den Gleichungen (7) und (8) in folgender Weise: Aus der ersten Gleichung (10) folgt:

$$\frac{\partial^2 \lg F}{\partial \alpha \, \partial \beta} = \frac{\partial^2 \lg W_\alpha}{\partial \alpha \, \partial \beta} + \frac{\partial^2 \lg W_\beta}{\partial \alpha \, \partial \beta} - \frac{2}{\cos^2 w'} \cdot w'_\alpha w'_\beta - 2 \operatorname{tg} w' \cdot w'_{\alpha\beta},$$

wo $w' = \frac{w}{2}$. Nun ist nach (9):

$$\frac{\partial^2 \lg W_\alpha W_\beta}{\partial \alpha \, \partial \beta} \cdot \operatorname{cotg} w' - \frac{1}{\sin^2 w'} \left(w'_\alpha \frac{\partial \lg W_\beta}{\partial \alpha} + w'_\beta \frac{\partial \lg W_\alpha}{\partial \beta} \right) = 2 w'_{\alpha\beta},$$

$$\frac{\partial^2 \lg W_\alpha W_\beta}{\partial \alpha \, \partial \beta} = \frac{1}{\sin w' \cdot \cos w'} \left(w'_\alpha \frac{W_{\alpha\beta}}{W_\alpha} + w'_\beta \frac{W_{\alpha\beta}}{W_\alpha} \right) + 2 w'_{\alpha\beta} \cdot \operatorname{tg} w',$$

also unter Benutzung der ersten Gleichung (7) und der ersten Gleichung (8)

$$\frac{\partial^2 \lg F}{\partial \alpha \, \partial \beta} = \frac{W_{\alpha\beta}}{\sin w' \cdot \cos w'} \left(\frac{w'_\alpha}{W_\alpha} + \frac{w'_\beta}{W_\beta} \right) - \frac{2 w'_\alpha w'_\beta}{\cos^2 w'}$$

$$= 2 \frac{w'_\alpha \lambda_\beta + w'_\beta (w'_\alpha - \lambda_\alpha)}{\sin w' \cdot \cos w'} \cdot \operatorname{tg} w' - \frac{2 w'_\alpha w'_\beta}{\cos^2 w'} = - \frac{\lambda_\alpha \mu_\beta - \lambda_\beta \mu_\alpha}{\cos^2 w'}$$

womit die verlangte Relation hergestellt ist. Sie erscheint hier als Folge der Gleichung (9), d. h. der Integrabilitätsbedingung für die Gleichungen (7) und (8) (nämlich $\lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{\beta\alpha}$ und $\mu_{\alpha\beta} = \mu_{\beta\alpha}$). Ist W reell, w rein imaginär (also λ und μ konjugiert imaginär), so ist diese Integrabilitätsbedingung immer identisch erfüllt. Bestimmt man nämlich λ durch Quadratur aus der Gleichung (7) für λ_β, so ergibt

sich die zweite Gleichung (8), d. i. die Gleichung für μ_β, aus der Bedingung $w = \lambda - \mu$, und somit auch μ durch Quadratur konjugiert zu λ; bildet man dann λ_α durch Differentiation, so muß sich der zu μ_β konjugierte Wert ergeben; das ist aber gerade der in der ersten Gleichung (8) auftretende Wert. Die beiden Werte (für λ_α und λ_β) sind also miteinander verträglich, und somit ist die Gleichung (9) von selbst erfüllt.

In derselben Weise zeigt man, daß die Gleichungen (14) und (14 a) miteinander verträglich sind, daß folglich die Integrabilitätsbedingung (15) erfüllt sein muß.

7. Im Beispiel der Minimalflächen ist nach § 12 der Abhandlung $\lambda = 2\alpha$, $\mu = 2\beta$, $W = A + B$

$$x = i\int[\operatorname{cosin} 2\alpha \cdot A' d\alpha - \operatorname{cosin} 2\beta \cdot B' d\beta],$$
$$y = i\int[\sin 2\alpha \cdot A' d\alpha - \sin 2\beta \cdot B' d\beta], \qquad z = A + B$$

und die allgemeinste Biegungsfläche ist:

$$\text{(27)} \quad \begin{aligned} \xi &= \int[P_\alpha \cdot \operatorname{cosin}\Phi \cdot d\alpha - P_\beta \cdot \operatorname{cosin}\Psi \cdot d\beta], \\ \eta &= \int[P_\alpha \cdot \sin\Phi \cdot d\alpha - P_\beta \cdot \sin\Psi \cdot d\beta], \quad \zeta = i\int[P_\alpha d\alpha + P_\beta d\beta], \end{aligned}$$

wo P eine beliebige rein imaginäre Funktion von α, β bezeichnet, und Φ, Ψ durch die Gleichungen bestimmt sind:

$$\text{(28)} \quad \begin{aligned} \Phi_\alpha &= -i\frac{\partial \lg P_A}{\partial\beta}\cdot M, \quad \Phi_\beta = -i\left[2\operatorname{tg}(\alpha-\beta) + \frac{\partial \lg P_A}{\partial\beta}\right]\cdot M, \\ \Psi_\beta &= i\frac{\partial \lg P_B}{\partial\alpha}\cdot M, \quad \Psi_\alpha = i\left[-2\operatorname{tg}(\alpha-\beta) + \frac{\partial \lg P_B}{\partial\beta}\right]\cdot M, \\ M^2 &= \frac{\operatorname{cosin}^2(\alpha-\beta)}{P_A P_B + \operatorname{cosin}^2(\alpha-\beta)}. \end{aligned}$$

Die drei Koordinaten ξ, η, ζ müssen der obigen Gleichung (11) genügen, in der z. B. W durch iP zu ersetzen ist, d. h. der Gleichung

$$\text{(29)} \quad \begin{aligned} -P_{\alpha\alpha}P_{\beta\beta} + P_{\alpha\beta}^2 - P_\alpha P_\beta\frac{F_\alpha F_\beta}{F^2} + P_{\alpha\alpha}P_\beta\frac{F_\beta}{F} + P_{\beta\beta}P_\alpha\frac{F_\alpha}{F} \\ = (F + 2P_\alpha P_\beta)\frac{\partial^2 \lg F}{\partial\alpha\,\partial\beta}. \end{aligned}$$

Hat man P beliebig angenommen, so ist $\Phi - \Psi$ durch die Gleichung (17), d. h. durch

$$(30) \quad \tfrac{1}{2} F^* = - P_\alpha P_\beta \operatorname{cosin}^2 \mathfrak{W}' = A' B' \operatorname{cosin}^2 (\alpha - \beta) = \tfrac{1}{2} F,$$

wo

$$\mathfrak{W}' = \tfrac{1}{2}(\Phi - \Psi),$$

bestimmt, und durch Differentiation ergeben sich die Gleichungen (28), welche zugleich aussagen, daß in (27) unter den Integralzeichen vollständige Differentiale stehen. Die rechte Seite von (29) ist wegen (30)

$$(31) \quad = 2 P_\alpha P_\beta \sin^2 \mathfrak{W}' \cdot \frac{\partial^2 \lg F}{\partial \alpha \, \partial \beta} = 4 P_\alpha P_\beta \frac{\sin^2 \mathfrak{W}'}{\operatorname{cosin}^2 (\alpha - \beta)}$$

Aus (30) folgt ferner:

$$\frac{P_{\alpha\alpha}}{P_\alpha} + \frac{P_{\alpha\beta}}{P_\beta} - 2 \operatorname{tg} \mathfrak{W}' \cdot \mathfrak{W}'_\alpha = \frac{F'_\alpha}{F},$$

$$\frac{P_{\alpha\beta}}{P_\alpha} + \frac{P_{\beta\beta}}{P_\beta} - 2 \operatorname{tg} \mathfrak{W}' \cdot \mathfrak{W}'_\beta = \frac{F'_\beta}{F}.$$

Setzt man diese Werte in die linke Seite von (29) ein, so wird dieselbe

$$= 2 \operatorname{tg} \mathfrak{W}' \cdot (P_{\alpha\beta} P_\beta \mathfrak{W}'_\alpha + P_{\alpha\beta} P_\alpha \mathfrak{W}'_\beta - 2 P_\alpha P_\beta \mathfrak{W}'_\alpha \mathfrak{W}'_\beta \operatorname{tg} \mathfrak{W}')$$
$$= 2 P_\alpha P_\beta \operatorname{tg}^2 \mathfrak{W}' (\Phi_\beta \mathfrak{W}'_\alpha - \Psi_\alpha \mathfrak{W}'_\beta - 2 \mathfrak{W}'_\alpha \mathfrak{W}'_\beta)$$
$$= P_\alpha P_\beta \cdot \operatorname{tg}^2 \mathfrak{W}' \cdot (\Phi_\alpha \Psi_\beta - \Phi_\beta \Psi_\alpha).$$

Wegen (31) geht also die Gleichung (29) über in

$$P_\alpha P_\beta \operatorname{tg}^2 \mathfrak{W}' (\Phi_\alpha \Psi_\beta - \Phi_\beta \Psi_\alpha) = 4 P_\alpha P_\beta \frac{\sin^2 \mathfrak{W}'}{\operatorname{cosin}^2 (\alpha - \beta)},$$

oder, da $\lambda = 2\alpha$, $\mu = 2\beta$ ist:

$$\frac{\Phi_\alpha \Psi_\beta - \Phi_\beta \Psi_\alpha}{\operatorname{cosin}^2 \mathfrak{W}'} = \frac{4}{\operatorname{cosin}^2 (\alpha - \beta)} = \frac{\lambda_\alpha \mu_\beta - \lambda_\beta \mu_\alpha}{\operatorname{cosin}^2 (\alpha - \beta)},$$

was nach Nr. 6 wieder mit der Gleichung $F = F^*$ identisch ist. Die Funktion P genügt also in der Tat der Gleichung (29).

Die Biegungsflächen (27) der gegebenen Minimalfläche findet man demnach in folgender Weise: 1. Man wähle P als beliebige rein imaginäre Funktion von α, β; dann

ist $d\zeta$ ein vollständiges Differential; 2. man bestimme sodann $\Phi - \Psi$ aus der Gleichung (30); 3. sodann Φ und Ψ einzeln aus den Gleichungen (28); dann sind auch $d\xi$, $d\eta$ totale Differentiale; 4. diese vier Gleichungen (28) sind miteinander verträglich; setzt man nämlich $\Phi = R + iS$, also $\Psi = R - iS$, wo R und S reell sind, so folgt: $\Phi_\alpha = R_\alpha + iS_\alpha$, $\Psi_\beta = R_\beta - iS_\beta$, $\Psi_\alpha = \Phi_\alpha - (\Phi - \Psi)_\alpha = R_\alpha - iS_\alpha$, und konjugiert dazu $\Phi_\beta = \Psi_\beta + 2iS_\beta = R_\beta + iS_\beta$; folglich $\Phi_{\alpha\beta} = \Phi_{\beta\alpha}$; ebenso $\Psi_{\alpha\beta} = \Psi_{\beta\alpha}$, so daß die Gleichung (9), und folglich auch (11) erfüllt ist, sobald $\Phi - \Psi$ rein imaginär ist; 5. die Bedingungen für α, β als Parameter der Minimalkurven sind dann identisch erfüllt; 6. wegen (30) ist $\xi_\alpha \xi_\beta + \eta_\alpha \eta_\beta + \zeta_\alpha \zeta_\beta = 2 P_\alpha P_\beta \cdot \cos^2 \mathfrak{W}' = 2 A' B' \operatorname{cosin}^2 (\alpha - \beta)$, d. h. $F = F^*$, so daß die Bedingung der Biegung erfüllt ist.

8. Ich benutze diese Gelegenheit, um noch folgende Druck- oder Schreibfehler in meiner größeren Abhandlung zu verbessern:

S. 9, Zeile 8 v. u.: Lies $-$ statt $=$.

S. 14 zu (37 a): Lies $\{z, z\}$ statt $\{x, z\}$.

S. 19, Zeile 10 v. u.: Lies $(W_1)_\alpha$ statt $(W_1)\alpha$.

S. 19, Zeile 10 v. u.: Lies $\operatorname{cotg} w_1'$ statt $\operatorname{tang} w$.

S. 30, Zeile 13 v. o.: Lies $\mathfrak{W}$ statt W.

S. 32: In Gleichung (88) sind α und β miteinander zu vertauschen.

S. 33, Zeile 1 v. u.: Die Quadratwurzel ist aus dem Nenner in den Zähler zu setzen.

S. 34: In der zweiten Gleichung (93 a) sind α und β miteinander zu vertauschen.

S. 36: In dem zweiten Ausdrucke für Ψ ist i durch $-i$ zu ersetzen.

S. 37, Zeile 12 v. o.: Lies „zweiter“ statt „dritter“.

S. 42, Zeile 7 v. u.: Der Zusatz zu Gleichung (25) ist zu streichen.



Über die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(x)|$.

Von Otto Volk.

Vorgelegt von F. Lindemann in der Sitzung am 14. Januar 1922.

Es gilt zunächst der Satz:

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)$ konvergiert gleichmäßig für alle x des Intervalls $-1 < x < +1$ und es ist:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2(1-x)}}.$$

C. Neumann[1]) spricht im Anschluß an den Beweis dieses Satzes, den er in sehr einfacher Weise mit Hilfe der Laplaceschen Formeln führt, die Vermutung aus, daß die Reihe absolut divergiert. Im folgenden soll nun die Divergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(x)|$ bewiesen werden.

Nach Heine[2]) ist, $x = \cos\vartheta$ gesetzt:

$$P_n(\cos\vartheta) = \sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\vartheta}}\left[\left(1-\frac{1}{4n}\right)\cos\left((n+\tfrac{1}{2})\vartheta-\frac{\pi}{4}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{8n}\operatorname{cotg}\vartheta\cdot\sin\left((n+\tfrac{1}{2})\vartheta-\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

1) Vgl. C. Neumann, Beiträge zum Studium der Randwertaufgaben. Abhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften, math.-phys. Klasse, Bd. XXXV, VII. (1920), S. 529, Anmerkung.

2) Vgl. E. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen I (1878), S. 178.

wenn nur $0 < \vartheta < \pi$ ist. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |P_n \cos \vartheta)|$ wird sich also von einem hinreichend großen N ab verhalten wie die Reihe:

$$(2) \qquad S = \sum_{n=N}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{n\pi \sin \vartheta}} \left| \cos\left((n + \tfrac{1}{2})\vartheta - \frac{\pi}{4}\right) \right|.$$

Die Divergenz dieser Reihe läßt sich nun leicht mit Hilfe des folgenden von Fatou[1]) aufgestellten Satzes beweisen:

Konvergiert oder divergiert die Fouriersche Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

in zwei Punkten absolut, so konvergiert oder divergiert sie absolut für alle dazwischen liegenden Punkte.

Betrachten wir nämlich die Reihe:

$$S_1 = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\left|\cos\left((n + \tfrac{1}{2})\vartheta - \frac{\pi}{4}\right)\right|}{\sqrt{n}}$$

und nehmen wir an, daß sie absolut konvergiere. Bilden wir mit Fatou:

$$\cos\left((n + \tfrac{1}{2})(\vartheta + h) - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left((n + \tfrac{1}{2})(\vartheta - h) - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$- 2\cos\left((n + \tfrac{1}{2})\vartheta - \frac{\pi}{4}\right) = -4\cos\left((n + \tfrac{1}{2})\vartheta - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$\cdot \sin^2 (n + \tfrac{1}{2}) h,$$

so folgt hieraus:

$$\left|\cos\left((n + \tfrac{1}{2})(\vartheta - h) - \frac{\pi}{4}\right)\right| < \left|\cos\left((n + \tfrac{1}{2})(\vartheta + h) - \frac{\pi}{4}\right)\right|$$
$$+ 2\left|\cos\left((n + \tfrac{1}{2})\vartheta - \frac{\pi}{4}\right)\right| \cdot (1 + 2\sin^2 (n + \tfrac{1}{2}) h)$$

und daher:

---

[1]) Vgl. P. Fatou, Séries trigonométriques et séries de Taylor. Acta math., Bd. 30 (1906), S. 398.

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{\left|\cos\left((n+\tfrac{1}{2})(\vartheta-h)-\frac{\pi}{4}\right)\right|}{\sqrt{n}} \leqq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\left|\cos\left((n+\tfrac{1}{2})(\vartheta+h)-\frac{\pi}{4}\right)\right|}{\sqrt{n}}$$

$$(4) \qquad + 2\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1+2\sin^2(n+\tfrac{1}{2})h}{\sqrt{n}} \cdot \left|\cos\left((n+\tfrac{1}{2})\vartheta-\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Hieraus ergibt sich:

Konvergiert die Reihe S_1 absolut in dem Intervall ϑ bis $\vartheta + h$, so konvergiert sie auch in dem dazu symmetrischen Intervall $\vartheta - h$ bis ϑ.

Würde nun die Reihe S_1 innerhalb eines beliebigen Intervalls innerhalb 0 bis $\frac{\pi}{2}$ bzw. $\frac{\pi}{2}$ bis π absolut konvergieren, so würde aus obigem Satze folgen, daß die Reihe S_1 auch in den Grenzpunkten $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ bzw. $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ und $\vartheta = \pi$ absolut konvergiert. Nun divergieren aber die beiden $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}}$. Wir kommen also zu einem Widerspruche. Die Reihe S_1 divergiert daher absolut im ganzen Intervall 0 bis π. Somit gilt entsprechend (1) und (2) der Satz:

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(x)|$ divergiert für alle x des Intervalls $-1 < x < 1$.

Betrachten wir nun die Reihe[1]):

$$(5) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\cos\vartheta),$$

so wird diese Reihe innerhalb des Einheitskreises ab-

---

[1]) Solche verallgemeinerte Kugelfunktionen-Reihen wurden von T. J. J'A. Bromwich, Investigations on series of zonal harmonics, Proc. of the Lond. math. Soc. (2), 4 (1906), S. 204—222 untersucht; diese Untersuchungen sind ganz analog denen von Pringsheim, Hardy u. a. über das Verhalten von Potenzreihen an der Konvergenzgrenze.

solut und gleichmäßig konvergieren. Auf dem Einheitskreise bleibt sie für $0 < \vartheta < \pi$, $\pi < \vartheta < 2\pi$ gleichmäßig konvergent, während sie absolut divergiert; für $\vartheta = 0$ divergiert sie gleichmäßig; für $\vartheta = \pi$ schwankt sie zwischen $+1$ und -1.

Während Bromwich[1]) bemerkt, daß man bei den Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos\vartheta)$ aus dem Verhalten in einem Punkte des Konvergenzkreises nicht ohne weiteres auf das Verhalten in anderen Punkten schließen kann, haben wir hier ein Beispiel, das dies gestattet, und man kommt so unmittelbar zu der Frage, ob nicht mit Hilfe des Fatouschen Satzes sich noch weitere Konvergenz- und Divergenzkriterien für das Verhalten solcher Reihen auf der Konvergenzgrenze aufstellen lassen.

[1]) l. c. S. 205.

Die Boursche Methode der Flächenbestimmung aus dem Linienelement.

Von **Heinrich Liebmann** in Heidelberg.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 14. Januar 1922.

Als zweites Hauptproblem der Biegungstheorie bezeichnet A. Voss die Aufgabe, alle Flächen mit gegebenem Bogenelement

$$(1) \qquad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

zu bestimmen[1]). Bours Verdienst besteht darin, daß er (zuerst unter Verwendung von Minimalparametern, die er „symmetrische Koordinaten" nennt, also für den Fall $E = G = 0$, sodann unter Verwendung eines geodätischen Orthogonalsystems, also für den Fall $E = 1$, $F = 0$) die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung aufgestellt hat, der die rechtwinkligen Koordinaten einer Fläche mit dem Bogenelement (1) genügen müssen. Ist eine Lösung $z(u, v)$ dieser „Biegungsgleichung" gefunden, dann kann man die zugehörigen $x(u, v)$ und $y(u, v)$ leicht durch Quadraturen bestimmen. Die hierbei neu auftretenden Integrationskonstanten sind übrigens „parasitär" — Bour hat dieses charakteristische Adjektivum in ähnlichem Sinne verwendet — insofern, als ihre Werte auf die Gestalt der Fläche gar keinen Einfluß haben, nur auf ihre Lage[2]).

[1]) Math. Enc. III, D 6a, Nr. 18, Das Boursche Problem.

[2]) Dieser Umstand wird genauer besprochen in einer demnächst in den „Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" erscheinenden Arbeit.

Bour hat sich über seine Biegungsgleichung mit folgenden Worten geäußert: „Die Differentialgleichung erhält man leicht und sogar in recht eleganter Form, aber es scheint geradezu unmöglich zu sein (*à peu près impossible*), ihr allgemeines Integral zu erhalten[1]).“

Angesichts dieser schwer zu widerlegenden Behauptung[1]) wollen wir uns hier mit der Behandlung von Beispielen begnügen, um zu sehen, was sich unter Verzicht auf die allgemeine Lösung unter günstigen Umständen doch erreichen läßt. Im übrigen werden wir dann ganz von selbst dazu geführt, zum Vergleich die neuere Weingartensche Methode[2]) heranzuziehen und einige weitere Fragen zu erörtern, z. B. die Verbiegung einer Fläche unter Festhaltung einer Kurve, die dann bekanntlich Haupttangenten-Kurve sein muß.

§ I. Die Boursche Gleichung für den Fall $E=1,\ F=0,\ G=u$.

Die Biegungsgleichung hat für das Bogenelement

$$ds^2 = du^2 + G(u)\,dv^2 \tag{2}$$

die Gestalt

$$\begin{aligned} &4G(z_{11}z_{22} - z_{12}^2) + 2GG'z_1z_{11} \\ &+ (2GG'' - (G')^2)(1 - z_1^2) - 2G''z_2^2 = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

in der die Differentialquotienten von G nach u durch Akzente, die von z nach u und v durch Fußmarken bezeichnet sind.

Die Fundamentalgrößen L, M, N sind dann durch

$$\begin{aligned} L:M:N:1 = 2z_{11}G:(2z_{12}G - z_2G'):(2z_{22}G \\ + z_1GG'):2\sqrt{G(G(1-z_1^2)-z_2^2)} \end{aligned} \tag{4}$$

bestimmt.

---

[1]) Voss hat (a. a. O., S. 397) insbesondere darauf hingewiesen, daß auf die Biegungsgleichung, die die Monge-Ampèresche Form hat, die Charakteristikentheorie nicht angewendet werden kann, „da dieselbe keine Zwischenintegrale besitzt“.

[2]) Voss, a. a. O., Nr. 31, S. 420 ff.

Zu einem derartigen Bogenelement (2) gehören bekanntlich, wie Bour zuerst festgestellt hat, Schraubenflächen, die man leicht bestimmen kann, indem man in (3) einsetzt

$$z = U(u) + \varkappa v; \tag{5}$$

für $\varkappa = 0$ erhält man Rotationsflächen.

Wir wollen jetzt unter Ausschaltung der trivialen Lösungen (5) den Fall $G = u$ genauer untersuchen. (3) nimmt hier die Form an

$$4u(z_{11}z_{22} - z_{12}^2) + 2uz_1z_{11} + z_1^2 - 1 = 0. \tag{6}$$

Von dieser Gleichung sollen jetzt verschiedene Lösungen angegeben werden.

Zunächst einmal gelingt es, in bescheidenem Maß eine „Separation der Veränderlichen" zu erreichen. Macht man z. B. den Ansatz

$$z = U(u) + \frac{\varkappa}{2}v^2 + c_1 v \quad (\varkappa \neq 0), \tag{7}$$

so erhält man zur Bestimmung von U die Gleichung

$$4u\varkappa U'' + 2uU'U'' + (U')^2 - 1 = 0,$$

deren Integration auf

$$(1 + U')^{1-2\varkappa}(1 - U')^{1+2\varkappa} = \frac{c_2}{u}$$

führt. U ist damit bis auf eine Quadratur bestimmt, und z enthält dann drei wesentliche Konstanten, während (5) nur eine wesentliche Konstante enthält[1]).

Ein zweiter Ansatz

$$z = u + V(v)$$

mit einer willkürlichen Funktion erfüllt (6) identisch und ergibt Regelflächen. Man erkennt dies sofort, da (4) in diesem Falle ergibt

$$L = 0.$$

[1]) Vgl. hierzu die eingehende Darstellung der Verbiegung von Rotations- und Schraubenflächen bei G. Scheffers, Einführung in die Theorie der Flächen (Leipzig 1902), S. 293 und 421.

Also sind jetzt die geodätischeu Linien $dv = 0$ zugleich Haupttangenten-Kurven, daher[1]) gerade Linien.

Dieses Tasten nach partikulären Lösungen ist aber nicht der einzige Weg zur Bearbeitung von (6).

Es liegt vielmehr hier einer der wenigen Fälle vor, bei denen die klassische Integrationsmethode der Monge-Ampèreschen Gleichungen mit Erfolg für die Theorie der Flächenverbiegung herangezogen werden kann.

Dieser Umstand rechtfertigt wohl eine genauere Behandlung nach der Methode. Um die übliche Bezeichnung verwenden zu können, schreiben wir in (6) jetzt x und y an Stelle von u und v und nach Monge

$$p, \; q, \; r, \; s, \; t$$

für die ersten und zweiten Differentialquotienten. Für (6) ist also zu schreiben

$$4x(rt - s^2) + 2xpr + p^2 - 1 = 0. \tag{6'}$$

Die beiden Systeme von Charakteristiken erster Ordnung sind aus

$$\begin{aligned} 4x\,dp + \lambda_1\,dy &= 0, \\ 4x\,dq + \lambda_2\,dx + 2xp\,dy &= 0 \end{aligned}$$

und den beiden Gleichungen zu erhalten, die hieraus durch Vertauschung von λ_1 und λ_2 entstehen[2]); dabei ist

$$\lambda_1 = 2\sqrt{x(p^2 - 1)}, \qquad \lambda_2 = -2\sqrt{x(p^2 - 1)}.$$

Die allgemeine Theorie lehrt weiter, daß man ein intermediäres Integral

$$f(x, y, z, p, q) = c$$

von (6') erhalten kann, wenn es gelingt, aus einem der beiden Systeme eine „integrable Kombination"

---

[1]) Weil geodätische Krümmung und Normalkrümmung beide gleich Null sind.

[2]) Vgl. Math. Enc. II, A. 5 (von Weber), Partielle Differentialgleichungen, Nr. 43—45. Daselbst muß in (157) das letzte Vorzeichen unter der Wurzel geändert werden.

$$df = 0$$

zu gewinnen. Dieser Fall liegt hier vor. Eliminiert man nämlich dy, so kommt

$$-dq + \frac{p\sqrt{x}}{\sqrt{p^2-1}}\,dp + \tfrac{1}{2}\,dx\sqrt{\frac{p^2-1}{x}} = 0$$

oder

$$-d\left(q - \sqrt{x(p^2-1)}\right) = 0.$$

Also ist

$$(q-c)^2 + x(p^2-1) = 0$$

ein intermediäres Integral von (6'), was nachträglich sofort durch Differentiation nach x und y bestätigt werden kann. Die vollständige Lösung dieser Gleichung erster Ordnung ist

$$(9') \qquad z = y(c+a) + \int\sqrt{1-\frac{a^2}{x}}\,dx + b = z(x, y, a, b, c).$$

Die allgemeine Lösung erhält man dann in bekannter Weise, indem man in (7') für b eine willkürliche Funktion $b(a)$ von a einsetzt, sodann bildet

$$\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial b}\frac{db}{da} = 0,$$

und a eliminiert. — Schließlich hat man für x und y wieder u und v zu schreiben.

Es ist immerhin bemerkenswert, daß die erforderlichen Integrationen sich hier soweit führen lassen, daß man eine „Biegungsgruppe" mit einer willkürlichen Funktion $b(a)$ und einer willkürlichen Konstanten c angeben kann, die die zuerst gefundenen partikulären Lösungen wesentlich ergänzt.

§ 2. Die Weingartensche Methode.

Das Bogenelement

$$ds^2 = du^2 + u\,dv^2$$

dessen „Biegungsgruppe" durch direkte Behandlung der Bourschen Gleichung (6) in § 1 noch nicht vollständig gewonnen

worden ist, ist auf der andern Seite geradezu das klassische Beispiel für die Weingartensche Methode. Die Flächen mit diesem Bogenelement sind nämlich Zentraflächen von Minimalflächen, und da einerseits alle Flächen mit derselben Relation zwischen den Hauptkrümmungsradien, in unserem Fall

$$R_1 + R_2 = 0$$

aufeinander abwickelbare Zentraflächen besitzen, anderseits alle Minimalflächen bekannt sind, so sind damit alle Flächen mit dem genannten Bogenelement bekannt[1]).

Wir wollen aber der Vollständigkeit halber diese Lösung hier entwickeln, um sie der weniger elastischen Bourschen Methode gegenüberzustellen und zugleich das Ergebnis weiter verwenden.

Wir bezeichnen die Koordinaten jetzt mit ξ, η, ζ und stellen uns die Aufgabe, durch den Ansatz

$$\begin{aligned} \xi &= uX + x, \\ \eta &= uY + y, \\ \zeta &= uZ + z \end{aligned} \tag{8}$$

zu erreichen, daß das Bogenelement den Wert

$$d\sigma^2 = du^2 + u\,dv^2 \tag{9}$$

erhält. Dabei ist (x, y, z) eine noch zu bestimmende Fläche, X, Y, Z sollen die Richtungscosinus ihrer Normalen bedeuten. Bezeichnet man das Bogenelement dieser Hilfsfläche mit ds^2, so hat man die Forderung

$$du^2 + u\,dv^2 = d\sigma^2 = du^2 + u^2 \Sigma dX^2 + ds^2 + 2u \Sigma dX\,dx$$

zu erfüllen. Führt man auf der Hilfsfläche Minimalparameter ein und bezeichnet man die Fundamentalgrößen der Hilfsfläche mit E, F, G, L, M, N, mittlere Krümmung und Krümmungsmasse wie üblich mit H und K, so erhält man hieraus die Forderung[2])

---

[1]) Vgl. auch Math. Enc. III, D 5 (von Lilienthal), Besondere Flächen, Nr. 17 und 18, sowie Darboux, Théorie des surfaces IV (Paris 1896), p. 324.

[2]) Der Formelapparat der Flächentheorie ist in den „Tafeln" am Schluß des oben genannten Werkes von Scheffers zusammengestellt. Hier kommen namentlich die Tafeln XII und XVIII in Betracht.

$$\begin{aligned} u\,dv^2 &= u(v_1\,d\alpha + v_2\,d\beta)^2 \\ &= u^2(H(L\,d\alpha^2 + 2M\,d\alpha\,d\beta + N\,d\beta^2) - 2KF\,d\alpha\,d\beta) \\ &\quad + 2F\,d\alpha\,d\beta - 2u(L\,d\alpha^2 + 2M\,d\alpha\,d\beta + N\,d\beta^2), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} u v_1^2 &= u^2 HL - 2uL, \\ u v_2^2 &= u^2 HN - 2uN. \\ u v_1 v_2 &= u^2(HM - KF) + F - 2uM. \end{aligned}$$

Diese drei Bedingungen sind erfüllt, wenn man für die Hilfsfläche eine Minimalfläche nimmt, denn alsdann ist

$$H = M = 0,$$

und die Mainardi-Codazzischen Gleichungen liefern

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \frac{\partial N}{\partial \alpha} = 0,$$

sind also mit

$$v_1^2 = -2L, \qquad v_2^2 = -2N$$

verträglich.

Hiermit ist die vollständige Biegungsgruppe des Bogenelementes (9) gewonnen, da man alle Minimalflächen kennt. Wir erhalten sie so. Die Hilfsfläche (Minimalfläche) stellen wir dar durch

$$\begin{aligned} z &= c(\alpha + \beta) \\ x &= ci\left(\int \cos A\,d\alpha + \int \cos B\,d\beta\right), \\ y &= ci\left(\int \sin A\,d\alpha + \int \sin B\,d\beta\right), \end{aligned} \tag{10}$$

worin A und B willkürliche Funktionen von α und β sind.

Es wird dann

$$\begin{aligned} u &= \frac{2c\sin^2 \frac{1}{2}(A - B)}{\sqrt{A'B'}}, \\ v &= \sqrt{2ic}\left(\int \sqrt{A'}\,d\alpha + \int \sqrt{-B'}\,d\beta\right), \end{aligned} \tag{11}$$

und

$$
\begin{aligned}
\xi &= c\left(\frac{\sin A - \sin B}{\sqrt{A' B'}} + i\int \cos A\, d\alpha + i\int \cos B\, d\beta\right),\\
(12)\quad \eta &= c\left(\frac{\cos B - \cos A}{\sqrt{A' B'}} + i\int \sin A\, d\alpha + i\int \sin B\, d\beta\right),\\
\zeta &= c\left(\frac{\sin(A-B)}{i\sqrt{A' B'}} + \alpha + \beta\right).
\end{aligned}
$$

Diese Darstellung umfaßt dann alle Flächen mit dem vorgeschriebenen Bogenelement (9).

Wir wollen die Darstellung verwenden, um ein Beispiel bedingter Verbiegung anzugeben, nämlich die Gesamtheit aller Flächen, die eine vorgeschriebene Kurve gemein haben und aufeinander abwickelbar sind. Diese starre Kurve ist dann bekanntlich Haupttangenten-Kurve für alle sie enthaltenden Flächen dieser speziellen Biegungsgruppe[1]).

Das Ergebnis ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
\xi &= c\left(-\sin\alpha\cos\alpha\left(i + \sqrt{\frac{2}{B'}}\right) - \frac{\sin B}{\sqrt{2B'}} + i\int_0^\beta \cos B\, d\beta\right),\\
(13)\quad \eta &= c\left(\frac{\cos 2\alpha}{\sqrt{2B'}} - i\sin^2\alpha + \frac{\cos B}{\sqrt{2B'}} + i\int_0^\beta \sin B\, d\beta\right),\\
\zeta &= c\left(i\,\frac{\sin(2\alpha - B)}{\sqrt{2B'}} + \alpha + \beta\right)
\end{aligned}
$$

und wurde erhalten durch die Wahl

$$A = \pi + 2\alpha.$$

Die Funktion $B(\beta)$ ist ganz beliebig wählbar bis auf die beiden Nebenbedingungen

$$B(o) = 0, \qquad B'(o) = 2.$$

[1]) Voss, a. a. O., S. 399, Nr. 19.

Alle diese Flächen haben die aus (13) für $\beta = 0$ sich ergebende Kurve gemein:

$$\xi(\alpha, 0) = -c \cos\alpha \sin\alpha (1 + i),$$
$$(14) \qquad \eta(\alpha, 0) = c(\cos^2\alpha - i \sin^2\alpha),$$
$$\zeta(\alpha, 0) = c(\alpha + i \sin\alpha \cos\alpha).$$

u und v sind wieder durch (11) gegeben. Insbesondere ist unter den Flächen eine reelle Schraubenfläche enthalten, die sich für $B = 2\beta$ ergibt.

Diese Fläche wird in reeller Form dargestellt durch

$$\xi = c(sht \cos\varphi - cht \sin\varphi),$$
$$\eta = c(sht \sin\varphi + cht \cos\varphi),$$
$$\zeta = c(\varphi - sht\, cht).$$

Dabei ist dann

$$u = c \cdot ch^2 t, \qquad v = \sqrt{2c}(\varphi - t),$$
$$\varphi - it = 2\alpha, \quad \varphi + it = 2\beta.$$

Andere reelle Flächen enthält diese spezielle Biegungsgruppe nicht.

§ 3. Weitere Verwendung der Bourschen Gleichung.

Wir kehren nochmals zur Fragestellung des ersten Paragraphen zurück, die wir jetzt so wenden wollen: Wie muß man in

$$(2) \qquad ds^2 = du^2 + G(u)\, dv^2$$

die Funktion G wählen, damit die zugehörige Boursche Gleichung durch den Ansatz

$$(15) \qquad z = U(u) + V(v)$$

gelöst werden kann, ohne daß $V(v)$ als lineare Funktion angenommen werden muß?

Diese Wahl ist, wie schon in § 1 bemerkt worden ist, immer möglich und führt auf die Schraubenflächen; wir schalten sie deshalb aus.

Setzt man (15) in die Boursche Gleichung (3) ein, so kommt

$$4\,U''V''G - 2\,G''(V')^2$$
$$+ 2\,U'U''GG' + (2\,G''G - (G')^2)(1 - (U')^2) = 0;$$

dabei sind die Differentialquotienten von U und G nach u und die von V nach v durch Akzente bezeichnet, überdies ist die Anordnung so gemacht, daß die zweite Zeile von v frei ist.

Man kann nun die Wahl treffen

$$G'' = 0, \quad V'' = \varkappa$$

und kommt damit wieder auf das in § 1 und 2 behandelte Bogenelement, man kann aber auch setzen

$$V'' = \varkappa(V')^2,$$

also

$$V = -\frac{1}{\varkappa}\log(\varkappa v)$$

und erhält dann die beiden Forderungen

$$4\,U''G\varkappa - 2\,G'' = 0,$$
$$2\,U'U''GG' + (2\,GG'' - (G')^2)(1 - (U')^2) = 0,$$

die jetzt zu erfüllen sind.

Setzt man

$$G(u) = g^2(u),$$

so verwandelt sich die zweite Gleichung in

$$U'U''g' + (1 - (U')^2)g'' = 0$$

und gibt das Integral

$$(g')^2 = c^2(1 - (U')^2).$$

Es ist einfach zu behandeln durch Verwendung eines Hilfsparameters t, indem man setzt

$$\frac{dg}{du} = g' = c\sin t,$$
$$\frac{dU}{du} = U' = \cos t.$$

Sodann ist noch zu setzen

$$U'' = \frac{G''}{2\varkappa G} = \frac{gg'' + (g')^2}{\varkappa g^2}.$$

Dabei ist

$$U'' = \frac{dU'}{du} = -\sin t \cdot t',$$

also

$$-\sin t \cdot t' = \frac{c \cos t \cdot t'}{\varkappa g} + \frac{1}{\varkappa} \frac{c^2 \sin^2 t}{g^2},$$

und es ist

$$t' = \frac{dt}{du} = \frac{dt}{dg} \cdot \frac{dg}{du} = c \sin t \cdot \frac{dt}{dg}.$$

Man erhält so

$$c \frac{dt}{dg}\left(\sin t + \frac{c \cos t}{\varkappa g}\right) + \frac{1}{\varkappa} \frac{c^2 \sin t}{g^2} = 0,$$

also die Riccatische Gleichung

$$\frac{dg}{dt} + g \cot t + \frac{\varkappa}{c} g^2 = 0.$$

Um hier eine bestimmte Wahl der Fundamental-Größe $G = g^2$ zu treffen, setzen wir

$$c = \varkappa,$$

(16)
$$g = \frac{1}{\sin t \lg \operatorname{tang} \frac{t}{2}}$$

und erhalten das Bogenelement

(17)
$$ds^2 = du^2 + g^2 dv^2 = \frac{dg^2}{\varkappa^2 \sin^2 t} + g^2 dv^2.$$

Der zugehörige Wert von z ist

(18)
$$z = U(u) + V(v) = \int \frac{\cos t}{\sin t} dg - \frac{1}{\varkappa} \log \varkappa v.$$

Zu jedem Bogenelement (17) hat man also von vorneherein (außer den Schrauben- und Rotationsflächen) noch eine Fläche (18); dabei ist t als Funktion von g gegeben durch (16).

Damit scheinen dann alle Möglichkeiten erschöpft zu sein, die Boursche Gleichung durch einen „separierenden“ Ansatz

$$z = U(u) + V(v)$$

zu integrieren.

Bour hat übrigens seine eigenen Leistungen überschätzt; die von Voss in seinem Enzyklopädie-Artikel kritisierte Stelle (Voss, a. a. O., S. 421, Anm. 288) enthält zwei Irrtümer. Er meint, daß die von ihm bestimmten, zum Bogenelement (2) gehörigen Schrauben- und Rotationsflächen drei wesentliche Konstanten enthalten, während in der Tat nur eine wesentlich ist, die anderen „parasitär“. Außerdem aber glaubt er, die allgemeinste Lösung der zugehörigen partiellen Differentialgleichung (3) aus einer partikulären mit drei willkürlichen Konstanten erhalten zu können. Seine pathetische Wendung: „Meine langwierigen Bemühungen . . . sind von Erfolg gekrönt worden in dem wichtigen und sehr umfangreichen Fall der Flächen, die auf die Rotationsflächen abwickelbar sind“, schießt also weit über das hier erreichte Ziel hinaus.

Merkwürdige Senkungen des Bodens von Frankreich.

Von **Emanuel Kayser.**

Vorgetragen in der Sitzung am 4. Februar 1922.

Im Anschluß an den Vortrag des Herrn Max Schmidt in der Januar-Sitzung sprach Herr Emanuel Kayser an der Hand geologischer Karten über merkwürdige Senkungen des Bodens von Frankreich in den Jahren zwischen 1860 und 1890.

Aus der Betrachtung des dem Schmidtschen Vortrage beigegebenen Isokatabasen-Kärtchens ergibt sich, daß fast ganz Frankreich sich im Zustande säkularer Senkung befindet. Nur am Abhange der Pyrenäen und der Alpen, wo die Katabase 0 verläuft, haben die Feinmessungen keine Senkung ergeben. In der Nähe des Mt. Cénis wurde sogar — als dem einzigen Punkte in ganz Frankreich — eine geringe Hebung (um 10 cm) festgestellt. Während also die beiden jugendlichen Hochgebirge keine Änderung ihrer Höhenlage erfahren haben, unterliegt das ganze übrige Frankreich einer Senkung, die um so stärker wird, je weiter man nach Nord kommt, und die an den Küsten des Kanals und der Nordsee (unweit Ostende) auf 80—100 cm anwächst. Wenn auch dies Ergebnis mit der bekannten Tatsache, daß die ganze nordfranzösische ebenso wie die niederländische Küste seit der Postglazialzeit einsinken, durchaus im Einklang steht, so muß doch die außerordentliche Schnelligkeit der Senkung, die mehr als 3 m im Jahrhundert beträgt, im höchsten Maße überraschen.

Im allgemeinen laufen die Katabasen in der Richtung von West nach Ost über das Gebiet Frankreichs hin, wie dies besonders die fast gerade Senkungslinie — 60 zeigt. Der Wechsel

der verschiedenen Formationen, selbst ihr Übertritt aus den alten Massiven in jüngere Sedimente, beeinflußt die Gestalt der fraglichen Linien so gut wie nicht; wohl aber wird sie in deutlichster Weise durch tektonische Verhältnisse bestimmt.

So machen sich besonders im Südosten des Landes, zwischen Alpen und Zentralplateau, höchst auffällige Rückbiegungen der Senkungskurven nach Süden geltend. Sie hängen offenbar damit zusammen, daß man sich hier im Bereich des Rhone-Saone-Grabens befindet, jenes großen jungen Senkungsfeldes, das in vielen Beziehungen ein Gegenstück unseres mittelrheinischen Grabenbruches darstellt. Wie dieser vom Schweizer Juragebirge — einem Seitenzweige der Alpen — ausgeht, so der Rhonegraben von dem versunkenen, vor der Rhonemündung liegenden Verbindungsstück zwischen Alpen und Pyrenäen. Die unweit der Mittelmeerküste hinziehende Katabase — 10 hat noch einen fast ungestörten West-Ost-Verlauf; allein schon ein wenig nördlich von ihr beginnen jene merkwürdigen tiefen Ausbuchtungen der Katabasen nach Süden, die nach Norden zu bis über Dijon hinaus anhalten und uns zeigen, daß wir im Bereiche des großen Rhone-Bruchfeldes stehen und daß in diesem die Senkung erheblich schneller fortschreitet, als im Gelände zu beiden Seiten außerhalb des Grabens. Erst im Norden von Dijon, in der Nachbarschaft des Plateaus von Langres, hört die Rückbiegung der Katabasen auf. Die Katabase — 60 zeigt keine Spur einer solchen mehr, und man darf daraus schließen, daß man sich hier schon jenseits des Grabenendes befindet.

Wenn übrigens die schmale Trichterform der Rückbiegung der Katabase — 50 so auffällig von den breiten bauchigen Rückbiegungen der Katabasen — 40 und — 30 abweicht, so hängt dies wohl damit zusammen, daß die Gestalt der nördlichen Senkungslinie lediglich durch den verhältnismäßig schmalen Saonegraben bestimmt wird, während weiter südlich, im Westen des Morvan — dieses abgetrennten Stückes des Zentralplateaus — zum genannten Graben noch das weitere ansehnliche Senkungsfeld der Limagne hinzukommt.

Ganz ähnliche, nicht minder merkwürdige Ausbauchungen der Isokatabasen wie im Bereiche des Rhone-Saone-Grabens trifft man im Nordosten von Frankreich, zwischen dem Palaeozoikum der Ardennen und von Brabant einerseits und dem Seinetale andererseits wieder. Auch hier sind die Umbiegungstrichter nach Süden gewandt; indes verläuft ihre Achse nicht wie im Rhonegebiet meridional, sondern von Südost nach Nordwest. Es kann kaum zweifelhaft sein, daß auch in diesem Falle der Grund der Rückbiegung darin zu suchen ist, daß wir hier in ein Abbruchsgebiet des alten variszisch-armorikanischen Faltengebirges eingetreten sind. Nur noch einmal treten aus diesem Senkungsfelde die niedergebrochenen karbonischen, devonischen und silurischen Schichten wieder zu Tage: in dem langen schmalen Horst von Boulogne, und dieser Horst fällt sogar ziemlich genau in die Mittellinie der Katabasentrichter. Das in Rede stehende große Bruchfeld ist zwar viel älter als das des Rhone-Saone-Grabens, da es schon in permischer Zeit entstand. Allein die Kräfte, die es schufen, sind noch nicht erloschen. Sie sind unter der mächtigen Decke mesozoischer und tertiärer Sedimente, welche das Bruchfeld später überdeckt haben, noch bis heute tätig und geben uns eine Erklärung dafür, daß die säkulare Senkung auch in diesem Gebiete erheblich schneller vor sich geht, als in seiner Umgebung.

Im Westen des eben besprochenen Feldes stoßen wir im Mündungsgebiet der Seine zwischen Paris und le Havre auf eine merkwürdige nordwestlich streichende Ellipse verhältnismäßig schwacher Senkung. Sie steht vielleicht in Beziehung mit dem über hundert km langen, ebenso streichenden Bruche, der an ihrem Nordrande von Dieppe ausstrahlt und das Hervortreten jurassischer Schichten aus der umgebenden Kreide bedingt.

Diese wenigen Mitteilungen lassen zur Genüge erkennen, welche wichtigen Aufschlüsse in nicht zu großen Zwischenräumen wiederholte Feinnivellements uns zu geben vermögen. Solche sollten mindestens alle 50 Jahre wiederholt und allmählich über immer größere Gebiete ausgedehnt werden.

Wollte man schließlich die Frage nach den Gründen der ausgedehnten einseitigen Senkung des französischen Bodens aufwerfen, so ließe sich darauf folgendes antworten. Beschränkt man sich auf Frankreich allein, so könnte es scheinen, als ob hier eine Schaukel- oder Wippbewegung vorläge. Die Nullkurve würde dem Stützpunkt der Wippe entsprechen, das südliche Hochgebirge aufsteigen, das Land im Norden aber einsinken. Es würde also eine Art isostatischer Bewegung im Spiele sein. Zieht man aber die Nachbarländer Frankreichs in Betracht, so kommt man zu anderen Anschauungen. Die Frankreich gegenüber liegende Südküste Englands sinkt zwar ebenfalls; allein schon die nördlich davon liegenden Teile Englands sowie Schottland sinken nicht, sondern steigen. Das Gebiet von Frankreich bildet somit ein zwischen zwei Hebungsgebieten eingeschaltetes Senkungsgebiet, eine Art Trog, dessen tiefste Stelle mit dem Kanal zusammenfällt. Daß die Achse dieses Troges sich nach Nordosten zu noch weit, nach der Ostsee und dem Ladogasee fortsetzt, geht daraus hervor, daß auch die norddeutschen Küsten sinken, die skandinavische aber steigt. Man gewinnt so den Eindruck, daß Frankreich eine große sinkende Mulde darstellt, die im Norden wie im Süden von sich hebenden Flanken begrenzt wird. Wir würden es darnach nicht mit isostatischen Vorgängen zu tun haben, sondern mit der Bildung einer großen flachen Falte, die wie alle Faltungen der Erdrinde mit deren Schrumpfung in Verbindung zu bringen wäre. Die am ganzen Außenrande der Alpen zu beobachtende Überkippung der Schichten, die Überfaltung der alpinen Decken nach Norden spricht ebenso, wie der Nachweis einer Vorwärtsbewegung der Alpen in gleicher Richtung[1]) zugunsten der Vorstellung, daß das gesamte zwischen dem skandinavisch-schottischen Massiv im Norden und den tertiären Hochgebirgen im Süden liegende Land (gleich einer zwischen den Backen eines Schraubstockes befindlichen Masse) der säkularen Zusammenpressung unterliegt.

[1]) Die Verkürzung des Abstandes München-Wendelstein.

Abhandlung von al-Faḍl b. Ḥâtim an-Nairîzî:

Über die Richtung der Qibla

(Arab. Hdschr. Nr. 2457, 17° der Bibl. nat. in Paris)

übersetzt und erläutert von **C. Schoy** in Essen a. d. R.

Vorgelegt von S. Günther in der Sitzung am 4. Februar 1922.

Schon wiederholt bestätigte sich meine Vermutung, daß das Studium der Abhandlungen arabischer Astronomen über die Bestimmung des Azimuts der Qibla tiefere Einblicke in ihre trigonometrischen Praktiken gewährt, als die Behandlung alltäglicherer Aufgaben der sphärischen Astronomie, wie man ihnen in den astronomischen Tafelwerken (zîǧât) der Araber gewöhnlich begegnet. So findet sich z. B. in den Ḥâkimitischen Tafeln des Ibn Jûnus († 1009) für die Bestimmung der Qiblarichtung ein Text, dessen Umsetzung in unsere Formelsprache genau den Kosinus- und Sinussatz der sphärischen Trigonometrie ergibt[1]), während man aus der rein konstruktiven Behandlung unserer Aufgabe durch Ibn al-Haiṯam (Alhazen) sofort den sog. Kotangentensatz der sphärischen Trigonometrie ablesen kann[2]).

Und als nicht minder wertvoll für die Geschichte der arabischen Trigonometrie erwies sich die Lektüre des vorstehenden hübschen Schriftchens. Denn es zeigte sich, daß

[1]) Mscr. Huntington 331, Oxford, S. 67 ff.

[2]) Abhandlung des al-Ḥasan ibn al-Ḥasan ibn al-Haiṯam (Alhazen) über die Bestimmung der Richtung der Qibla. Nach d. Oxforder Mscr. Selden, Arch. A 34, aus dem Arab. übers. von C. Schoy (Ztschr. d. Deutsch. Morgenl. Gesellsch. 1921, S. 242—254).

an-Nairîzî (Anaritius) die auf sphärische Dreiecke übertragenen Transversalensätze des Menelaos bereits in rein trigonometrischer Form anwendet, und zwar sowohl die „Regel der 4 Größen", als auch die sog. „Schattenregel" der Araber[1]) (Tangentensatz). Über diese 2 Regeln liest man bei A. von Braunmühl[2]): „Als Quelle für beide Sätze haben wir schon früher die Sphärik des Menelaus nachgewiesen. Während wir aber vermuten, daß das erste Theorem bereits im Besitze Ṯâbits (gemeint ist Ṯâbit ibn Qorra † 901) war, ist das zweite unstreitig Abû'l Wafâ's Eigentum."

Da Anaritius († 922/23) ein Zeitgenosse al-Battânîs († 929) war, so ist er gegenüber Abû'l Wafâ' († 998) der Prior, und die erste Kenntnis der „Schattenregel" muß in der arabischen Trigonometrie um eine Anzahl Jahrzehnte vordatiert werden.

Über die näheren Lebensumstände unseres Gelehrten weiß man so gut wie nichts. Er stammte aus dem persischen Städtchen Nairîz, südöstlich von Schîrâz und hat später wohl in Bağdâd gelebt. Über seine Werke unterrichtet Suters treffliche Abhandlung: „Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke", Leipzig 1900, S. 45. Dazu wäre zu vergleichen: M. Curtze, „Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis commentarii ex interpr. Gherardi Cremonensis, Leipzig 1899, S. VIII.

Der Übersichtlichkeit halber möchte ich zuerst eine kurze Darstellung geben, wie an-Nairîzî das Azimut der Qibla ermittelt hat, sodann die wörtliche Übersetzung des arabischen Textes (ohne Auslassungen) folgen lassen, und den Schluß des Ganzen soll die Anfügung einer geographischen Tafel des Ibn aš-Šâṭir (1304—1375/76) bilden, die außer den geographischen

---

[1]) A. von Braunmühl: Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I, Leipzig 1900, S. 17, 58, 67). Vgl. auch die treffliche Abhandlung von Axel Anton Björnbo: Studien über Menelaos' Sphärik (Abhandlungen z. Geschichte d. mathemat. Wissenschaften, XIV. Heft, 1902, S. 89—95).

[2]) A. a. O., S. 58.

Koordinaten einer Anzahl bekannter Ortlichkeiten islâmischer Länder, auch deren Qiblarichtung enthält. Ich habe diese Daten dem arab. Codex 1403 (Gotha) entnommen (S. 72a—75b).

I. Δ (Baġdâd) sei Kartenmittelpunkt, und von Δ aus soll die Richtung der Qibla ($= \sphericalangle\, \alpha$) bz. Mekka ($G$) berechnet werden. Die geographischen Breiten von Baġdâd und Mekka seien bzw. φ_1 und φ_2; sie werden bei der Ermittlung von α natürlich als bekannt vorausgesetzt, wie auch der Längenunterschied λ der beiden Orte. Und zwar lehrt Anaritius: $\varphi_1 = 33^0\,25'$; $\varphi_2 = 21^0\,41'$; $\lambda = 3^0$[1]). T sei der Nordpol der Erde und AC der Äquator. Der Kreis $ABCD$ mit Δ als Mittelpunkt stellt den Horizont von Baġdâd dar und Linie $DT\Delta B$ den Meridian daselbst. Der Meridian von Mekka ist $TGUK$. Zieht man jetzt noch durch Baġdâd und Mekka den Großkreis (Quadranten) ΔGL, so bildet er mit dem Meridian von Baġdâd den $\sphericalangle\, \alpha$, der die Blickrichtung von Baġdâd nach Mekka, d. i. das Azimut der Qibla, in Baġdâd bestimmt. Winkel α heißt der Inḥirâf (Abweichung, Deklination) der Qibla. Nach unserem Autor gilt:

$$\frac{\sin BT}{\sin BH} = \frac{\sin KT}{\sin KU} \cdot \frac{\sin AU}{\sin AH}. \qquad \text{I)}$$

---

[1]) Statt 5^0. Diese um rund 2^0 zu geringe Längendifferenz zwischen Baġdâd und Mekka findet man bei sehr vielen arab. Autoren. Viel genauer sind dagegen die Breitenangaben für die beiden Städte. Die Breite Baġdâds haben die Söhne des Mûsâ b. Šâkir am 17. Juni und am 16. Dezember 868 zu $33^0\,20'$ bestimmt und zwar die Breite der Bâb aṭ-Ṭâq, an der ihre Wohnung lag. [Ḥâkimitische Tafeln, Leidener Mscr. Nr. 143, S. 222/23.] Dieser Wert ist bis zur Bogenminute genau. Man begegnet bei den Angaben für φ_1 und φ_2 keinen ganz übereinstimmenden Werten in arabischen Tafelwerken. Es finden sich dafür bei

al-Battânî:	$\varphi_1 = 33^0\,9'$;	$\varphi_2 = 21^0\,40'$,
Abû'l Wafâ':	$\varphi_1 = 34^0\,19'$;	$\varphi_2 = 22^0$,
Ibn Jûnus:	$\varphi_1 = 33^0\,20'$;	$\varphi_2 = 21^0$,
Abû'l Ḥasan: (v. Marroko)	$\varphi_1 = 33^0\,15'$;	$\varphi_2 = 21^0$,
Ibn aš-Šâtir:	$\varphi_1 = 33^0\,25'$;	$\varphi_2 = 21^0\,30'$
Ulúġ Beg:	$\varphi_1 = 33^0\,25'$;	$\varphi_2 = 21^0\,40'$.

Dabei ist: $BT = 180^0 - \varphi_1$; $BH = 90^0 - \varphi_1$; $AU = 90^0 - UH = 90^0 - \lambda$; $AH = TH = 90^0$.

Unbekannt sind die Bögen KT und KU; es besteht aber zwischen ihnen die Beziehung $KT = 90^0 + KU$. Somit läßt sich KU berechnen. Denn I. vereinfacht sich zu

$$\frac{\sin \varphi_1}{\cos \varphi_1} = \frac{\cos KU}{\sin KU} \cdot \frac{\cos \lambda}{\sin 90^0},$$

und diese Gleichung lehrt Anaritius. Sie ist mit der „Schattenregel" identisch. Wir würden zur Berechnung von KU schreiben

$$\operatorname{cotg} KU = \operatorname{tang} \varphi_1 \cdot \frac{\sin 90^0}{\cos \lambda}. \qquad \text{I a)}$$

Allein der Autor besaß wohl keine Tangententafel (Schattentabelle), die geeignet war zur Berechnung von arc KU aus I a). Vielmehr leitet er aus der „Schattenregel" zum Gebrauch seiner Sinustafel ab:

$$\sin KU = 1 : \sqrt{1 + \left(\frac{\frac{\sin \varphi_1}{\cos \varphi_1}}{\cos \lambda}\right)^2}. \qquad \text{II)}$$

Hieraus wird arc KU gefunden. Ich füge in Klammer den genauen Wert zu an-Nairîzîs Resultat jeweils hinzu. Es ist nach des Autors Rechnung:

KU = angrenzender 1. Bogen = $56^0\,24'\,8''$ [$56^0\,32'\,49\overset{''}{.}91$].

An-Nairîzî lehrt ferner:

$$\frac{\sin TH}{\sin BH} = \frac{\sin UT}{\sin KU} \cdot \frac{\sin AK}{\sin AB}. \qquad \text{III)}$$

Und da $TH = UT = AB = 90^0$; $BH = 90^0 - \varphi_1$ ist, so ergibt sich aus III):

$$\frac{\sin 90^0}{\sin (90^0 - \varphi_1)} = \frac{\sin AK}{\sin KU}, \qquad \text{IV)}$$

und dies ist die „Regel der 4 Größen", die der Autor zur Berechnung von arc AK umformt in

$$\sin AK = \frac{\sin 90^0 \cdot \sin KU}{\cos \varphi_1}. \qquad \text{IV a)}$$

Aus IVa) findet Anaritius:

AK = Ergänzung des abgeschnittenen 1. Bogens
$= 86^0\,12'\,15''\ [88^0\,20'\,48''.3]$,

BK = abgeschnittener 1. Bogen $= 3^0\,47'\,45''\ [1^0\,39'\,11''.7]$.

Alsdann berechnet der Autor arc LG und dessen Ergänzung zu 90^0, arc ΔG mit Hilfe der Gleichung:

$$\frac{\sin BT}{\sin \Delta B} = \frac{\sin TK}{\sin GK} \cdot \frac{\sin LG}{\sin \Delta L}. \qquad \text{V)}$$

Und da

$BT = 180^0 - \varphi_1$; $\Delta B = 90^0$; $TK = 90^0 + KU$;
$GK = \varphi_2 + KU$; $\Delta L = 90^0$

ist, so vereinfacht sich V) zu

$$\sin \varphi_1 = \frac{\cos KU \cdot \sin LG}{\sin(\varphi_2 + KU)},$$

welch letzterer Ausdruck nach $\sin LG$ aufgelöst wird; denn Anaritius lehrt:

$$\sin LG = \frac{\sin \varphi_1 \cdot \sin(\varphi_2 + KU)}{\cos KU}. \qquad \text{Va)}$$

Es finden sich für arc LG und arc ΔG folgende Werte:

LG = angrenzender 2. Bogen $= 76^0\,50'\ [77^0\,58'\,15'']$,
ΔG = abgeschnittener 2. Bogen $= 13^0\,10'\ [12^0\ 1'\,45'']$.

Endlich findet er $\sphericalangle\, a$ = arc LB mittels der Gleichung

$$\frac{\sin LB}{\sin KB} = \frac{\sin \Delta L}{\sin \Delta G} \cdot \frac{\sin TG}{\sin TK}. \qquad \text{VI)}$$

Dabei ist

$KB = 3^0\,47'\,45''\ [1^0\,39'\,11''.7]$; $\Delta L = 90^0$;
$\Delta G = 13^0\,10'\ [12^0\,1'\,45'']$; $TG = 90^0 - \varphi_2$; $TK = 90^0 + KU$.

So wird denn VI) zu

$$\sin LB = \frac{\sin 3^0\,47'\,45'' \cdot \sin 90^0}{\sin 13^0\,10'} \cdot \frac{\cos 21^0\,41'}{\cos 56^0\,24'\,8''}, \qquad \text{VIa)}$$

woraus an-Nairîzî folgert:

$$LB = 29^0\,7'\ [13^0\,29'\,40''.7].$$

Dieser große Fehler — aus VI a) resultiert nämlich mit den Zahlen des Autors rund 29° 12′ — rührt zur Hauptsache aus dem gänzlich falschen Werte für KB her.

Auch Abû'l Wafâ' löst in seinem Almagest, der sich als arab. Mscr. 2494 in der Bibl. nat. zu Paris befindet, die Aufgabe, das Azimut der Qibla für Bagdâd zu berechnen. Ich habe seine Lösung in meine „Arabische Sonnenuhrkunde" [Teil des Werkes „Geschichte der Zeitmessung und der Uhren" von E. von Bassermann-Jordan, München 1922] aufgenommen (Mscr. 2494 der Bibl. nat.[1]), S. 67a). Hier sollen nur einige Zahlenangaben gemacht werden. Es ist nach Abû'l Wafâ':

$\sin\lambda = 3' \; 8'' \; 24''' \; 34^{IV}$, also $\lambda = 3^\circ$,
$\cos\varphi_2 = 55' \; 37'' \; 51''' \; 43^{IV}$, „ $\varphi_2 = 22^\circ$,
$\sin \varDelta G = 12' \; 51'' \; 57'''$, „ $\varDelta G = 12^\circ \; 23'$,
$\sin \alpha = 13' \; 49'' \; 9''' \; 19^{IV}$, „ $\alpha = 13^\circ \; 49' \; 15'' \; 55'''$,

woraus man ersieht, daß die rechnerischen Hilfmittel des Abû'l Wafâ' ungleich vollkommener waren als die des an-Nairîzî. Die Breite Bagdâds kommt bei Abû'l Wafâ' nicht vor, statt dessen gibt er $\varDelta G$ an. Aus seinen Daten würde für φ_1 der Wert 34° 19′ folgen.

II. Übersetzung des arabischen Textes.

S. 78v „Im Namen Gottes des barmherzigen Erbarmers!

Abhandlung von al-Faḍl ben Ḥâtim an-Nairîzî über die Richtung der Qibla.

Es werde die Ausführung für Medînat as-Salâm (Bagdâd) gemacht. Wir verzeichnen zuerst für Medînat as-Salâm[2]) den Horizontkreit $ABCD$ mit dem Mittelpunkt H. Es möge ferner

[1]) Die trefflichen trigonometrischen Leistungen Abû'l Wafâ's stehen im I. Buch seines Almagest. Ihre Kenntnis verdanken wir einer Studie Carra de Vauxs, die er durch Analyse des obigen Pariser arab. Mscrs. vor 30 Jahren gab (vgl. Journal asiatique 1892, S. 408—472). Die trigonometrischen Anwendungen hingegen stehen im II. Buch des Almagest, und es wäre sehr erwünscht, daß Herr Baron Carra de Vaux auch hieraus das Wichtigste publizierte.

[2]) Die Handschr. hat nur selten Salâm, meist Silm.

Punkt A der Anfangspunkt des Äquators (Beginn des Widders und der Wage) sein und C sein Schlußpunkt. Der Äquator sei CHA und der halbe Meridian von Medînat as-Salâm BHD. Punkt $\varDelta$ sei das Zenit von Medînat as-Salâm, während G das Zenit der Bewohner Mekkas bedeute. T sei der Nordpol. Ein (größter) Kreis durch ihn und G schneidet den Bogen $TGUK$ aus, und arc HU ist die Längendifferenz, die sich bezüglich Bagdâds (und Mekkas) auf 3 Längengrade beläuft. Das ist ein bekannter Bogen. Damit ist auch arc UA gegeben als Ergänzung des Bogens HU zu 90°. Bogen $TGUK$ ist ein Stück des Meridians von Mekka. Er ist unbekannt, und deshalb wollen wir ihn ermitteln. Wir ziehen durch die beiden Punkte G und $\varDelta$ den Viertelkreis $LG\varDelta$, und das zeigt, daß aṣ-ṣalât[1]) (Gebetskreis?) in Medînat as-Salâm der untere Teil eines Quadranten ist. Es möge jener Teil (Abschnitt) die Punkte der beiden Horizonte passieren, d. h. die Ebene $\varDelta GL$ senkrecht auf den zwei Horizonten stehen. Wir wollen jetzt in Erfahrung bringen, wie wir den Bogen BL des Horizontkreises kennen lernen; falls wir ihn ermittelt haben, kennen wir das Azimut der Qibla.

Da zwischen den zwei Bögen TB und AB die Bögen $TGUK$ und HUA sich in U schneiden, so ist

$$\frac{\sin TB}{\sin BH} = \frac{\sin TK}{\sin KU} \cdot \frac{\sin UA}{\sin HA} \text{ }^{2)}.$$

Arc BH ist der Betrag der Höhe des Beginns des Widders und der Wage (Äquatorhöhe = Ergänzung der geogr. Breite Bagdâds zu 90°). Es sind also auch die beiden Bögen TB und $\varDelta H$ bekannt. Auch arc AUH ist gegeben; es ist arc AH = 90°. Was aber einen jeden der 2 Bögen TK und UK anbetrifft, so sind beide unbekannt; aber der Überschuß des Bogens TK über UT hinaus ist bekannt und = 90°, und so wird arc UK bekannt in der Weise, wie ich es jetzt beschreibe:

[1]) aṣ-ṣalât heißt das Gebet; es kann hier aber nur arc $\varDelta G$ gemeint sein.

[2]) Natürlich stehen die Formeln in Worten da. Die multiplikative Verbindung des Verhältnisses sin UA : sin HA mit dem Vorhergehenden ist durch „mu'allif" ausgedrückt.

Kapitel über die Berechnung des Bogens UK.

Wir nennen ihn den angrenzenden 1. Bogen. Wir teilen den Sinus des Bogens $\varDelta H$, der gleich dem Sinus der Breite von Medînat as-Salâm ist, durch den Sinus 55^p, d. i. der Wert des Sinus der Ergänzung (Kosinus) der Breite von Baġdâd zu 90^0. Was sich ergibt, nennen wir das Verhältnis I/II. Darauf teilen wir den Kosinus der Längendifferenz, ich meine der Differenz der Länge Baġdâds vom Westen gezählt mit der Länge Mekkas, durch Sinus totus (sin 90^0), und was aus der Teilung entfließt, nennen wir V/VI. Nunmehr teilen wir I/II durch V/VI, und was hieraus resultiert, nennen wir III/IV. Wir erheben jetzt III/IV ins Quadrat. Das Quadrat vermehren wir um 1 und ziehen alsdann die Quadratwurzel aus der Summe. Mit der Wurzel, welche wir genommen haben, teilen wir in sin · tot · ($= 60^p$), und was sich aus der Teilung ergibt, ist der Sinus des angrenzenden Bogens. Wir machen ihn zu Bogen, und was wir als Bogen erhalten, das ist der angrenzende 1. Bogen UK.

Kapitel über die Berechnung der Bögen KA und KB.

S. 78r Es ist

$$\frac{\sin TH}{\sin HB} = \frac{\sin TU}{\sin UK} \cdot \frac{\sin AK}{\sin AB}.$$

Da jeder eine der zwei Bögen TH und $TU = 90^0$ ist, so wird gerade

$$\frac{\sin UK}{\sin HB} = \frac{\sin AK}{\sin AB}.$$

Wir multiplizieren (also) $\sin UK$, welches der Sinus des angrenzenden 1. Bogens ist, mit $\sin AB$, dem sin. tot., und teilen das Produkt durch $\sin HB$, d. i. der Cosinus der Breite des Ortes; alsdann ist das Ergebnis der Teilung gleich $\sin AK$, und (damit) ist Bogen AK bekannt; es bleibt noch Bogen KB (zu ermitteln). Wir ziehen arc AK von 90^0 ab, und es ist (der Rest) KB der abgeschnittene 1. Bogen.

Kapitel über die Berechnung des abgeschnittenen 1. Bogens[1]).

Wir multiplizieren den Sinus des angrenzenden 1. Bogens mit sin. tot. und teilen das Ergebnis durch den Kosinus der Ortsbreite. Was aus der Teilung herauskommt, machen wir zu Bogen, und jener Bogen ist die Ergänzung des abgeschnittenen 1. Bogens.

Kapitel über die Kenntnis des Bogens ΔG.

Es ist $$\frac{\sin BT}{\sin \Delta B} = \frac{\sin TK}{\sin GK} \cdot \frac{\sin LG}{\sin \Delta L},$$

und weil der 2. Bogen gleich dem 6. ist, welche beiden Bögen aber ΔB und ΔL sind, so wird das Verhältnis des Sinus des 1. Bogens BT zum 5., nämlich LG, wie das Verhältnis vom Sinus des Bogens TK zu dem Sinus von GK, dem 4. Wir multiplizieren den Sinus des 1. Bogens, d. i. sin BT, mit sin GK, welcher Bogen (GK) aus dem angrenzenden Bogen und dem Bogen GU, d. i. der Breite Mekkas, zusammengesetzt ist, und wir teilen das Produkt durch sin TK; was aus der Teilung herauskommt, ist gleich sin LG. Damit wird arc LG bekannt und infolgedessen auch arc ΔG. Wir nennen Bogen LG den angrenzenden 2. Bogen; was aber Bogen ΔG anbetrifft, so ist er der abgeschnittene 2. Bogen.

Kapitel über die Berechnung des angrenzenden 2. und des abgeschnittenen 2. Bogens.

Wir multiplizieren den Sinus der Ortsbreite mit dem Sinus der Summe des angrenzenden 1. Bogens und des Bogens der Breite Mekkas. Was aus dieser Multiplikation hervorgeht, teilen wir durch den Kosinus des angrenzenden 1. Bogens. Das Resultat verwandeln wir in Bogen, und der erlangte Bogen ist der angrenzende 2. Bogen. Wir ziehen ihn von 90^0 ab; der Rest ist der abgeschnittene 2. Bogen.

---

[1]) Dies Kapitel lehrt im Vergleich zum vorhergehenden eigentlich nichts Neues.

Kapitel über die Kenntnis des Azimuts, d. i. des Bogens LB.

Es ist $$\frac{\sin LB}{\sin KB} = \frac{\sin \Delta L}{\sin \Delta G} \cdot \frac{\sin TG}{\sin KT},$$

und es ist ein jeder der Bögen, außer dem 1. bekannt, und er ergibt sich aus den anderen.

Kapitel über seine Berechnung,

ich meine des Azimutbogens zwischen der Mittagslinie, bis zu dem, was an den Westen von Medînat as-Salâm grenzt, und so wächst die Länge einer jeden Stadt bz. der Länge Mekkas von Westen an. Wir multiplizieren den Sinus des 1. angrenzenden Bogens mit sin. tot. und teilen das Produkt durch den Sinus des 2. abgeschnittenen Bogens. Was aus der Division S. 79r hervorgeht, multiplizieren wir mit dem Kosinus der Breite Mekkas, und was sich aus dieser Multiplikation ergibt, das dividieren wir durch den Kosinus des angrenzenden 1. Bogens. Was aus dieser Division hervorgeht, machen wir zu Bogen, und der sich ergebende Bogen ist das oben erwähnte Azimut.

Zahlenbeispiel.

Dieser äußersten Grenze (der Genauigkeit?) nahe zu kommen ist mir nicht möglich, falls ich eine Beobachtung mache wie jene berühmten Astronomen[1]). Trotzdem habe auch ich den Wert der Längendifferenz zwischen Mekka und Medînat as-Salâm durch Beobachtung festgestellt. Da diese Beobachtung sich auf eine bevorstehende Mondfinsternis stützt, so muß einer der Beobachter in Medînat as-Salâm, der zweite in Mekka sein, und es muß jeder eine von ihnen den Teil der Nacht wissen, der seit Beginn der Verfinsterung schon verflossen ist, sei es bei dem Eintritt ihrer Totalität, sei es bei ihrer vollendeten Entartung[2]). Alsdann findet sich der Unterschied der Zeiten

[1]) Es sind wohl die Astronomen al-Ma'mûns gemeint.

[2]) Der arab. Text hat „tamâm al-chilâfh“; vielleicht soll mit diesem Ausdruck das völlige Aufhören der Verfinsterung bezeichnet werden.

an den 2 Orten, ich meine der seit der Mitternacht verflossenen Zeiten. Und was das bis zur Mitternacht übrig Bleibende anbetrifft, so ist die restierende Differenz der Abstand zwischen den Meridianen. Und schon oben (ist gesagt), daß diese Differenz zwischen Medînat as-Salâm und Mekka etwa 3° ist, wie ich es geschrieben fand, in der Art, wie ich es jetzt erzähle:

Und das ist, daß der Fürst der Gläubigen, al-Ma'mûn, — möge ihn Gott zu Gnaden annehmen — es seinerseits für notwendig erachtete, das Azimut der Qibla zu verbessern. Es fand sich zwischen dem Meridian von Mekka und dem von Medînat as-Salâm ein Unterschied von rund 3°, worunter 3 Grade des Äquators zu verstehen sind; und dies ist der Wert des Bogens UH. Wir geben von der Breite von Medînat as-Salâm den Sinus an, und der ist $= 33^p\,2'\,38''$ oder $= 118958$ Sekunden $= 7137480$ Tertien. Der Kosinus der Ortsbreite ist $50^p\,4'\,54''$ oder $= 180294$ Sekunden. Wir teilen den Sinus der Breite von Medînat as-Salâm durch den Kosinus; es folgt aus der Teilung $39'\,35''\,17''' = 142517'''$. Wir nennen dies Teilverhältnis I/II. Der Kosinus von 3°, d. i. der Kosinus der Differenz der 2 Meridiane, ist $59^p\,55'\,4''$. Wir teilen ihn durch sin. tot., und es kommt aus der Teilung $59'\,55''\,4'''$ heraus. Das ist das Verhältnis V/VI, und es ist in Tertien ausgedrückt $= 215704'''$. Nunmehr teilen wir das Verhältnis I/II durch das Verhältnis V/VI, und es ergibt sich aus der Teilung für das Verhältnis III/IV das Resultat $39'\,51''\,14'''$. Wir quadrieren diesen Wert und erhalten $26'\,28''\,14'''$. Dies vermehren wir um 1^p und ziehen die Quadratwurzel aus der Summe; die Wurzel liefert $4322'' = 1^p\,12'\,2''$. Damit teilen wir in den sin. tot., aus welcher Teilung $49^p\,58'\,37'' = 179417''$ hervorgeht. Und dies ist der Sinus des angrenzenden 1. Bogens, des Bogens KU. Der entsprechende Bogen KU ist $= 56^0\,24'\,8''$. Wir multiplizieren sin KU mit sin. tot. und teilen das Produkt durch den Kosinus der Ortsbreite, welcher Kosinus $= 50^p\,4'\,54''$ ist. Was aus der Teilung hervorgeht, ist $= 59^p\,5'\,6''$, und dies ist der Sinus der Ergänzung des abgeschnittenen Bogens $=$ sin KA. Der entsprechende Bogen ist $= 86^0\,12'\,15''$.

S. 80v

Die Breite Mekkas ist 21° 41′. Wir vermehren sie um den angrenzenden 1. Bogen, und es wird die Summe = 78° 4′ 8″. Der Sinus hievon ist 58^p 42′ 12″. Dies multiplizieren wir mit dem Sinus der Breite von Medînat as-Salâm, welcher Sinus = 33^p 2′ 38″ ist. Das Ergebnis der Multiplikation ist 1939^p 46′ 55″. Das Komplement des angrenzenden 1. Bogens ist 33° 35′ 52″. Der Sinus hievon beträgt 33^p 12′ 18″. Wir teilen damit in das, was sich aus der 1. Multiplikation ergibt, die 6983215″ lieferte, nämlich mit 112530″; aus dieser Division kommt 58^p 25′ 20″ heraus. Das ist der Sinus des angrenzenden 2. Bogens. Der entsprechende Bogen selbst ist = 76° 50′. Wir ziehen dies von 90° ab, was übrig bleibt, ist der abgeschnittene 2. Bogen; er ist = 13° 10′ = Bogen ΔG.

Wir hatten den Kosinus des abgeschnittenen 1. Bogens berechnet, welcher gleich sin KA = 59^p 5′ 6″ ist. Es ist also der Betrag der Ergänzung des abgeschnittenen 1. Bogens = 86° 12′ 15″, und seine Ergänzung, welche der abgeschnittene 1. Bogen selbst ist, = 3° 47′ 45″, und das ist Bogen KB. Sein Sinus ist 3^p 57′ 5″. Wir multiplizieren ihn mit sin. tot. und erhalten 237^p 56′. Diese Zahl teilen wir durch den Sinus des abgeschnittenen 2. Bogens, der = 13° 40′ 1″ ist. Was dieser Teilung entfließt, ist 17^p 44′ 35″. Die Ergänzung der Breite Mekkas ist 68° 20′ [genauer 68° 19′]; der Sinus hierzu ist = 55^p 45′ 18″. Wir multiplizieren ihn mit dem, was aus der Teilung herauskam, und erhalten 959^p 42′ 15″. Dies teilen wir durch den Kosinus des angrenzenden 1. Bogens, der = 33^p 12′ 15″ ist. Der sich ergebende Bogen ist = 29° 7′. Und dies ist der Betrag des Bogens LB, der das Azimut ist, ich meine die Bogendistanz zwischen dem Südende der Mittagslinie und dem Punkte, der gen Westen liegt, genommen auf dem Horizontkreise von Medînat as-Salâm. Unter diesem Punkt ist S. 80r aṣ-ṣalât (Azimut des Gebetskreises ΔGL) = 29° 7′, und das ist es, was wir beweisen wollten.“

Gerne und dankbarst erwähne ich an dieser Stelle die gütigen Hilfeleistungen zur Erlangung der Photos der kleinen Handschrift, die ich den Herren Joaquim Bensaude (Lissabon), Baron Carra de Vaux (Paris) und Alfred Wolfer (Zürich) verdanke.

Tafel der Länge und Breite einiger bekannter Städte, sowie des Inḥirâfs ihrer Qibla.

Städte	Länge	Breite	Inḥirâf	Städte	Länge	Breite	Inḥirâf
Qubbat Arîn	90° 0'	0° 0'	117° 10'	Asuân	55° 50'	22° 30'	87° 0'
Insel Soqoṭra	67° 30'	9° 30'	176° 0'	Asiûṭ	55° 10'	26° 0'	70° 30'
Donqola	53° 40'	14° 0'	106° 20'	al-Fajûm	55' 0	28° 30	56° 20'
Fâs	8° 0'	35° 30'	90° 0'	al-Qâhira	54° 40'	30° 0'	55° 10'
Ṭanǧa	8° 30'	35° 30'	90° 0'	Iskenderja	51° 50'	30° 58'	58° 0'
Tûnis	29° 30'	31° 40'	101° 30'	Damjâṭ	53° 50'	31° 25'	58° 0'
Siǧilmêsa	10° 45'	31° 20'	93° 30'	Ġaza	56° 0'	32° 0'	48° 0'
Zuweila	19° 30'	30° 0'	90° 0'	ʿAsqâlon	55° 20'	32° 0'	48° 30'
Qorṭoba	8° 40'	35° 0	90° 0'	ar-Ramla	56° 50'	32° 40'	42° 30'
Rûmia	35° 35'	41° 50'	63° 20'	al-Quds aš-šarîf	56° 30'	32° 0'	44° 30'
Mâqîdûnjâ	49° 0'	40° 0'	45° 0'	ʿAkkâ	58° 30'	33° 20'	35° 0'
Qairuân	31° 0	32° 30'	81° 50'	Beirût	59° 50'	33° 0'	32° 0'
Tarâbulus al-ġarb	32° 20'	32° 30'	78° 10'	Ṭarâbulus aš-šâm	59° 40'	34° 0'	29° 0'
Barqa	43° 0'	32° 0'	68° 40'	Dimišq al-maḥrûsa	60° 0°	33° 30'	28° 0'
Išbîlia	15° 40'	37° 15'	70° 30'	Ḥoms	61° 0	34° 20'	25° 40'
Serendîb	127° 30'	10° 0'	64° 30'	Tadmur	61° 40'	35° 0'	22° 30'
ʿAden	66° 30'	11° 0'	0° 0'	aṣ-Salt	58° 10'	32° 50'	30° 0'
Ḥadramaut	71° 30'	12° 30'	86° 30'	Baṣrâ(î)	60° 0'	32° 55'	30° 0'
Ṣanʿâʾ	60° 30'	14° 30'	176° 0'	Gard ʿalâʾl-šaṭṭ			
Sûâkin	60° 0'	19° 0	170° 0'	Ǧazîra b. ʿamr	56° 0'	34° 0'	39° 0'
Ẓafâr	60° 0'	13° 30'	177° 0'	Qusṭanṭînia	56° 50'	41° 15	28° 40'
Sabâ	68° 0'	16° 30'	168° 0'	ar-Raqqa	63° 15'	36° 0'	17° 30'
Kandî	101° 30'	19° 10'	86° 30'	Hît	69° 0'	32° 30'	9° 50'
Qandahâr	98° 0'	33° 0'	75° 0'	al-Ambar	69° 50'	33° 15'	14° 20'
Dînawar	96° 0'	33° 45'	73° 0'	Bâb al-abwâb	66° 0'	41' 40'	3° 30'
al-Manṣûra	95° 0'	35° 40'	87° 0'	Darenda	64° 50'	39° 50'	3° 30'
Qašmîr	99° 0'	33° 20'	78° 0'	Širwân	67° 30'	40° 0'	0° 0'
Mekka al-mušrafa	67° 0'	21° 30'	0° (qibla)	Nachičawân	72° 20'	38° 30'	15° 30'
al-Medîna al-munáwwara	65° 20'	24° 45'	0° 0'	Ardubîd	73° 0'	37° 50'	19° 40'
al-Jamâma	71° 30'	21° 50'	81° 30'	Täbrîz	73° 10'	37° 40'	20° 30'
Haǧar	73° 30'	24° 55'	53° 20'	Marâġa	73° 10'	36° 25'	21° 40'
Fusṭâṭ aṣ-ṣaʿîd	54° 30'	30° 0'	53° 10'	Sinǧâr	68° 0'	35° 0'	4° 40'

Tafel der Länge und Breite einiger bekannter Städte, sowie des Inḥirâfs ihrer Qibla.

Städte	Länge	Breite	Inḥirâf	Städte	Länge	Breite	Inḥirâf
Nînivî	69° 0′	35° 55′	7° 40′	Qâšân	76° 0′	34° 0	40° 3
Takrît	69° 30′	35° 30′	9° 30′	Kirmân	90° 0′	30° 0′	30° 4
al-Kûfa	69° 30′	32° 0′	13° 30′	Qum	75° 0′	35° 0′	35° 4
Baġdâd	70° 0′	33° 25′	13° 30′	Iṣṭachr	75° 40′	32° 0′	36° 2
al-Môṣul	69° 0′	35° 10′	10° 30′	ar-Raî	70° 0′	35° 35′	38° 1
Kazwân	77° 0′	30° 0′	48° 0′	Bûzǧân	85° 0′	35° 20′	54°
Baṣra	75° 0′	31° 0	37° 30′	Nîšabûr	82° 30′	36° 20′	96°
Šîrâz	75° 30′	30° 0′	57° 30′	Berṣâw	57° 30′	40′ 0′	28°
Wâsiṭ	71° 30′	32° 20′	20° 30′	Merwarrûḏ	87° 0′	37° 0′	32°
al-Nahirwân	70° 20′	33° 25′	13° 20′	Herâa	88° 40′	36° 45′	61° 0
ʿAbadân	75° 0′	31° 0′	37° 0′	Saqrâr	89° 0′	39° 0′	64° 0
Iṣfahân	75° 40′	32° 30′	49° 21′	Qaraǧistân	89° 0′	36° 40′	58° 0
Hamadân	74° 0′	35° 0′	22° 0′	Bulġâr	88° 0′	49° 0	57° 0
Samarqand	88° 20′	40° 0′	51° 40′	Aḏerbîǧân	78° 0′	39° 0′	20° 0
Chuwârizm	84° 0′	42° 10′	39° 0′	Buchârâ	88° 0′	39° 0′	49° 0
Ferġâna	92° 0′	42° 20′	83° 0′	Chorâsân	89° 30′	40° 30′	51° 10

Neue Bemerkungen zur Kirchhoffschen Analogie zwischen Kreisel und elastischer Linie.

Von **Ludwig Föppl** in Dresden.

Vorgelegt von A. Föppl in der Sitzung am 4. Februar 1922.

Kirchhoff[1]) hat eine bemerkenswerte Analogie zwischen der Bewegung eines Kreisels, d. h. eines nur in einem Punkte festgehaltenen starren Körpers, und der Gleichgewichtsfigur eines sehr dünnen, nur an den Enden durch Kräfte oder Kräftepaare beanspruchten elastischen Stabes gefunden. Sie drückt sich mathematisch durch die Übereinstimmung der Differentialgleichungen für beide Probleme aus. Im Anschluß an Kirchhoff hat vor allen Dingen W. Heß[2]) die Analogie vom mathematischen Standpunkt aus eingehend behandelt. Die Resultate der vorliegenden Arbeit sind zum Teil in den Heßschen Abhandlungen schon enthalten, werden aber durchweg auf viel einfacherem und anschaulicherem Weg gewonnen. Die vektoranalytische Darstellung sowohl der Kreiselbewegung wie der Gleichgewichtslage des elastischen Stabes, die hier gewählt worden ist, läßt die Analogie beider Probleme in durchsichtiger Weise hervortreten und zugleich ihre Ausdehnung auf elastische Stäbe von ursprünglicher Krümmung erkennen. Da in den letzten Jahrzehnten die Kreiselbewegung durch Einführung des Impulsvektors oder Dralles eine so wertvolle Dar-

---

[1]) G. Kirchhoff, J. f. Math. 56 (1858), S. 285 oder „Mechanik", S. 418.

[2]) W. Heß, Sitzungsberichte d. bayer. Akademie d. Wissenschaften 1883, S. 82—110 und Math. Annalen 23 (1884), S. 181—212 und 25 (1885), S. 1—38.

stellung gefunden hat, die sich auch in Kreisen der Ingenieure eingebürgert hat[1]), so durfte eine neue Beschäftigung mit der Kirchhoffschen Analogie lohnend erscheinen, umsomehr, als auch auf der anderen Seite unsere Kenntnisse über Knick- und Kipperscheinungen des elastisches Stabes in den vergangenen Jahrzehnten eine lebhafte Weiterentwicklung erfahren haben. Die Analogieschlüsse, die aus der Dauer der Präzessionsbewegung mühelos die kritische Knick- oder Kippbelastung zu berechnen gestattet, dürfte der wertvollste Teil der vorliegenden Arbeit sein, da diese Fragestellung in den älteren Arbeiten nicht herausgearbeitet worden ist.

§ I. Die Analogie zwischen Kreisel und elastischer Linie in vektorieller Darstellung.

Für die Kreiselbewegung ist der Impulsvektor oder Drall, den wir mit $\mathfrak{B}$ bezeichnen wollen, von ausschlaggebender Bedeutung. Denken wir uns sowohl den Drall wie die Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ auf die drei Hauptachsen des Körpers für den festgehaltenen Punkt projiziert, so gilt bekanntlich[2])

$$B_1 = u_1 \Theta_1; \quad B_2 = u_2 \Theta_2; \quad B_3 = u_3 \Theta_3, \tag{1}$$

wenn mit Θ_1, Θ_2, Θ_3 die Trägheitsmomente für die drei Hauptachsen bezeichnet werden. Wir nehmen an, daß der Schwerpunkt des Kreisels im Abstand 1 vom Unterstützungspunkt auf der Hauptachse mit dem Trägheitsmoment Θ_3 gelegen ist. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{s}$ den Einheitsvektor vom festen Punkt zum Schwerpunkt und mit $\mathfrak{P}$ das im Schwerpunkt angreifende Gewicht, so ist das statische Moment von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf den festgehaltenen Punkt als Momentenpunkt durch den Vektor $[\mathfrak{P}\,\mathfrak{s}]$ gegeben und es gilt die Beziehung

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = [\mathfrak{P}\,\mathfrak{s}].$$

---

[1]) Vor allen Dingen durch Klein-Sommerfeld, „Theorie des Kreisels", sowie durch A. Föppl, „Vorlesungen über technische Mechanik", Bd. IV.

[2]) s. A. Föppl, „Vorlesungen über techn. Mechanik", Bd. IV, § 25.

Diese Gleichung gilt aber nur für ein im Raum ruhendes Koordinatensystem. Beziehen wir dagegen den Drall auf das im Körper feste Hauptachsensystem, so ist zu beachten, daß sich für einen relativ zum Körper ruhenden Beobachter der umgebende Raum mit der Winkelgeschwindigkeit $-\mathfrak{u}$ dreht und demnach der Endpunkt des Dralles infolge dieser Drehung des Koordinatensystems sich mit der Geschwindigkeit $[\mathfrak{u}\mathfrak{B}]$ fortbewegt[1]). Auf das im Körper feste Hauptachsensystem bezogen, geht folglich die letzte Gleichung über in

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = [\mathfrak{u}\mathfrak{B}] + [\mathfrak{P}\mathfrak{s}]. \tag{2}$$

Schreiben wir diese Vektorgleichung in drei Koordinatengleichungen für die drei Hauptachsen des Kreisels um, so ist zu beachten, daß die äußere Kraft $\mathfrak{P}$ im Abstand 1 auf der dritten Hauptachse angreift und folglich

$$[\mathfrak{P}\mathfrak{s}] = \begin{vmatrix} i & P_1 & 0 \\ j & P_2 & 0 \\ \mathfrak{k} & P_3 & 1 \end{vmatrix} = i P_2 - j P_1$$

ist. Die Gleichung für die erste Hauptachse lautet demnach:

$$\frac{dB_1}{dt} = u_2 B_3 - u_3 B_2 + P_2,$$

oder:

$$\Theta_1 \frac{du_1}{dt} = u_2 u_3 (\Theta_3 - \Theta_2) + P_2.$$

Entsprechend findet man die beiden anderen Gleichungen für die zweite und dritte Hauptachse, so daß wir statt (Gl. 1) in Koordinatendarstellung schreiben können:

$$\left.\begin{aligned} \Theta_1 \frac{du_1}{dt} &= u_2 u_3 (\Theta_3 - \Theta_2) + P_2, \\ \Theta_2 \frac{du_2}{dt} &= u_3 u_1 (\Theta_1 - \Theta_3) - P_1, \\ \Theta_3 \frac{du_3}{dt} &= u_1 u_2 (\Theta_2 - \Theta_1). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

[1]) Wegen Vorzeichen s. A. Föppl, „Vorlesungen", Bd. I, § 20.

Mit $P_1 = P_2 = 0$ folgen hieraus die Eulerschen Gleichungen für den kräftefreien Kreisel.

Wir wollen nun eine ganz entsprechende Ableitung für die Differentialgleichung der elastischen Linie eines ursprünglich geraden, sehr schlanken zylindrischen Stabes geben, der nur an den Enden durch Einzellasten $\mathfrak{P}$ und Momente $\mathfrak{M}_0$ beansprucht wird. Die ursprünglich gerade Linie, die die Stabachse darstellt, wird nach der Belastung des Stabes im allgemeinen in eine räumliche Kurve übergehen. Die maßgebenden Krümmungen und die Verwindung der elastischen Linie wird zweckmäßig mit Hilfe eines rechtwinkligen Koordinatensystems gemessen, dessen Anfangspunkt mit einem Punkt der elastischen Linie zusammenfällt und dessen Achsen 1 und 2 in die beiden Hauptrichtungen des Querschnitts fallen, während die dritte Achse mit der Tangente an die elastische Linie übereinstimmt. Läßt man den Anfangspunkt dieses Koordinatensystems die ganze elastische Linie mit gleich bleibender Geschwindigkeit durchlaufen, so daß in gleichen Zeitelementen dt gleiche Wegelemente ds auf der elastischen Linie zurückgelegt werden, so geben die Winkelgeschwindigkeiten u_1, u_2, u_3, mit denen sich die Hauptachsen drehen, ein Maß für die Krümmungen bzw. Verwindung des Stabes. Bezeichnen wir mit $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ die Krümmungen der elastischen Linie, die man bei ihrer Projektion auf die durch die Hauptachsen 2 und 3 bezw. 1 und 3 bestimmten Ebenen erhält, und wird mit τ die Verwindung des Stabes bezeichnet, so kann man setzen:

$$u_1 = \varkappa_1; \quad u_2 = \varkappa_2; \quad u_3 = \tau, \tag{4}$$

worin der Dimensionsfaktor, der eigentlich noch nötig wäre, der Einfachheit halber weggelassen ist. Dem Koordinatensystem, das sich längs der elastischen Linie in der oben angegebenen Weise bewegt, entspricht beim Kreisel das im Kreisel feste Koordinatensystem, so daß sich die Hauptachsen in beiden Fällen entsprechen und die Winkelgeschwindigkeiten und Krümmungen ineinander übergehen, wie es durch die letzten Gleichungen zum Ausdruck gebracht ist. Wie beim Kreisel der

Drall von maßgebender Bedeutung ist, so gilt dies in gleicher Weise beim Stab für das in jedem Querschnitt übertragene Moment. Projiziert man den Momentenvektor $\mathfrak{M}$ nach den drei Hauptachsen und bezeichnet die Projektionen mit M_1, M_2, M_3, so sind die beiden ersteren Komponenten die Biegungsmomente um die beiden Hauptachsen, während M_3 das Torsionsmoment für den Querschnitt angibt. Bei sehr dünnen Stäben bestehen zwischen den Momenten und den dadurch hervorgerufenen Krümmungen des ursprünglich geraden Stabes die erweiterten Hookeschen Gleichungen:

$$M_1 = C_1 \varkappa_1; \quad M_2 = C_2 \varkappa_2; \quad M_3 = C_3 \tau, \qquad (5)$$

die unmittelbar den Gl. (1) entsprechen, wenn man die Gl. (4) beachtet und die Trägheitsmomente der Kreiselachsen Θ_1 und Θ_2 den Biegungssteifigkeiten $C_1 = EJ_1$ und $C_2 = EJ_2$ des Stabes entsprechen läßt, während das Trägheitsmoment Θ_3 der Torsionssteifigkeit $C_3 = GJ$ entspricht. Dabei sind der Elastizitätsmodul E und der Schubelastizitätsmodul G als gegebene konstante Größen anzusehen, ebenso wie die Hauptträgheitsmomente des Querschnitts J_1 und J_2 und der Drillungswiderstand J des Querschnitts gegebene konstante Größen sein sollen.

Wirkt an dem Stabende außer einem Moment $\mathfrak{M}_0$ auch noch eine Kraft, die wir mit $-\mathfrak{P}$ bezeichnen wollen, so wird in jedem Querschnitt außer dem Moment $\mathfrak{M}$ die Kraft $\mathfrak{P}$ übertragen werden müssen. Das Moment ändert sich infolgedessen beim Fortschreiten längs der Stabmittellinie um

$$\frac{d\mathfrak{M}}{ds} = [\mathfrak{P}\mathfrak{s}],$$

wenn $\mathfrak{s}$ einen Einheitsvektor in Richtung der Tangente an die elastische Linie bedeutet. Bezieht man diese Gleichung auf das oben angegebene, längs der elastischen Linie mit konstanter Geschwindigkeit wandernde Koordinatensystem, das sich jeweils mit der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ gegen den Raum dreht, so nimmt die letzte Gleichung die Form an:

$$\frac{d\mathfrak{M}}{ds} = [\mathfrak{u}\,\mathfrak{M}] + [\mathfrak{P}\,\mathfrak{s}]. \tag{6}$$

Man sieht unmittelbar die Übereinstimmung mit Gl. (2) für die Kreiselbewegung. In dieser Übereinstimmung besteht die Analogie zwischen der Kreiselbewegung und der Gleichgewichtsfigur des elastischen Stabes, der an den Enden beansprucht wird. Greift an den Stabenden keine Einzelkraft, sondern nur je ein Kräftepaar an, so fehlt in Gl. (6) das zweite Vektorprodukt, so daß einem derart beanspruchten Stab als kinetische Analogie der kräftefreie bzw. im Schwerpunkt unterstützte Kreisel entspricht.

Der Übergang von der Vektorgleichung (6) zu den Koordinatengleichungen erfolgt ebenso, wie wir beim Kreiselproblem aus Gl. (2) die Koordinatengleichungen (3) erhalten haben. Das Resultat ist in Übereinstimmung mit den Gl. (3) folgendes:

$$\left.\begin{aligned} C_1 \cdot \frac{d\varkappa_1}{ds} &= \varkappa_2 \tau (C_3 - C_2) + P_2, \\ C_2 \cdot \frac{d\varkappa_2}{ds} &= \tau \varkappa_1 (C_1 - C_3) - P_1, \\ C_3 \cdot \frac{d\tau}{ds} &= \varkappa_1 \varkappa_2 (C_2 - C_1). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Die Analogie zwischen dem Kreisel und dem ursprünglich geraden, nur an den Enden beanspruchten Stab läßt sich demnach folgendermaßen zusammenfassen: Dem im Kreisel festen Hauptachsen-Koordinatensystem für den festgehaltenen Punkt entspricht das dazu stets parallele, nach Tangente und Querschnittshauptachsen orientierte Koordinatensystem beim Stab, das mit gleich bleibender Geschwindigkeit der elastischen Linie entlang gleitet. Der Trägheitshauptachse, in der im Abstand 1 vom festen Punkt der Schwerpunkt des Kreisels gelegen ist, entspricht die Tangente an die elastische Linie beim Stab; ferner dem Gewicht des Kreisels die Last am Stabende. Jeder Kreiselbewegung läßt sich eine entsprechende Gleichgewichtslage eines elastischen Stabes zuordnen.

Mit Hilfe der angestellten Überlegungen kann man auch leicht die Frage entscheiden, ob die Analogie auch auf den Fall übertragen werden kann, daß der Stab ursprünglich nicht gerade war, wie oben stets angenommen worden ist, sondern im natürlichen Zustand schon eine Krümmung besessen hat. Gl. (6) muß auch in diesem Fall noch Gültigkeit behalten; dagegen ändern sich die Gl. (5), da die Komponenten des Momentenvektors $\mathfrak{M}$ proportional den Krümmungsänderungen zu setzen sind. Bezeichnen wir die Krümmungen und die Verwindung des unbelasteten Stabes mit $\varkappa_1'$, $\varkappa_2'$ und τ', so müssen die Gl. (5) hier folgendermaßen lauten:

$$M_1 = C_1(\varkappa_1 - \varkappa_1'); \quad M_2 = C_2(\varkappa_2 - \varkappa_2'); \quad M_3 = C_3(\tau - \tau'). \qquad (8)$$

Es ist zweckmäßig, das Moment $\mathfrak{M}$, entsprechend der Zerlegung seiner drei Komponenten, in zwei Einzelmomente zu spalten:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'' - \mathfrak{M}',$$

deren Bedeutung ohne weiteres aus den Gl. (8) ersichtlich ist. Lassen wir die Gl. (4) zwischen den Krümmungen und Winkelgeschwindigkeiten bestehen, so entspricht dem Moment $\mathfrak{M}''$ der Drall $\mathfrak{B}$ des Kreisels, und man sieht ferner, daß bei verschwindendem Moment, d. h. $\mathfrak{M}'' = \mathfrak{M}'$ der Drall ebenso wie $\mathfrak{M}''$ nicht verschwindet, sondern einen Wert $\mathfrak{B}_0$ besitzt, der durch die anfängliche Krümmung des elastischen Stabes bestimmt ist und dem fingierten Moment $\mathfrak{M}'$ entspricht. Gl. (6), die wir folgendermaßen schreiben:

$$\frac{d}{ds}(\mathfrak{M}'' - \mathfrak{M}') = [\mathfrak{u} \cdot (\mathfrak{M}'' - \mathfrak{M}')] + [\mathfrak{P}\mathfrak{s}],$$

entspricht demnach eine Kreiselgleichung von folgender Form:

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_0) = [\mathfrak{u} \cdot (\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_0)] + [\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{s}].$$

Da wir aber gesehen haben, daß $\mathfrak{B}$ schon allein den zeitlich veränderlichen Drall bedeutet, so muß $\frac{d\mathfrak{B}_0}{dt} = 0$ sein oder $\mathfrak{B}_0 = \text{const}$ und, damit die Analogie möglich ist,

$$\mathfrak{M}' = \text{const}; \quad \text{d. h.} \quad \varkappa_1' = \text{const}; \quad \varkappa_2' = \text{const}; \quad \tau' = \text{const}.$$

Wir sehen demnach, daß eine Analogie zwischen einem Kreisel und einem ursprünglich krummen, elastischen Stab nur besteht, wenn die Anfangskrümmung über die ganze Länge des Stabes hin konstant war; also z. B. bei einem Stab von ursprünglich kreisförmiger oder schraubenförmiger Gestalt. Die letzte Kreiselgleichung zeigt ferner, daß $\mathfrak{B}$ der Drall des eigentlichen Kreisels ist, auf dem ein Schwungrad so angebracht zu denken ist, daß sein Schwerpunkt mit dem festgehaltenen Punkt des eigentlichen Kreisels zusammenfällt und das sich relativ zum Kreisel mit konstanter Geschwindigkeit dreht, so daß sein Drall, vom kreiselfesten Koordinatensystem aus gesehen, den konstanten Wert $\mathfrak{B}_0$ besitzt. Dem Anfangszustand des elastischen Stabes entspricht demnach das gleichförmig rotierende Schwungrad mit dem Drall $\mathfrak{B}_0$, der seinerseits an Stelle des fingierten Momentes $\mathfrak{M}'$ beim elastischen Stab tritt.

§ 2. Die Analogie zum kräftefreien Kreisel.

Die Gleichungen, die für die Bewegung eines im Schwerpunkt unterstützten Kreisels gelten, werden aus den Gl. (2) bzw. (3) erhalten, indem man $\mathfrak{P} = 0$ bzw. $P_1 = P_2 = 0$ setzt. Ihnen entsprechen die Gl. (6) bzw. (7) mit $\mathfrak{P} = 0$ bzw. $P_1 = P_2 = 0$ beim elastischen Stab; d. h. ein nur durch Momente $\mathfrak{M}_0$ bzw. $-\mathfrak{M}_0$ an den beiden Stabenden beanspruchter elastischer Stab, der ursprünglich gerade und von zylindrischer Gestalt war.

Die einfachsten Bewegungen eines kräftefreien Kreisels sind die Drehbewegungen um eine der drei Hauptachsen mit konstanter Geschwindigkeit. Dabei bleiben jedesmal die beiden anderen Hauptachsen in der gleichen Ebene. Das Analogon beim Stab ist die Biegung durch Endmomente um die eine oder andere Hauptachse bzw. die Beanspruchung auf Torsion, entsprechend der Rotation des Kreisels um die dritte Hauptachse. Besitzt der Kreisel insbesondere Rotationssymmetrie um die dritte Hauptachse, so daß $\Theta_1 = \Theta_2$ ist, so besitzt der zugehörige Stab einen kreis- oder kreisringförmigen Querschnitt,

so daß die Biegungssteifigkeiten für alle Richtungen einander gleich sind, d. h. $C_1 = C_2$.

Da die Differentialgleichungen für die Kreiselbewegung und den elastischen Stab formal vollkommen übereinstimmen, so müssen sich auch die Stabilitätsbedingungen für eine Gleichgewichtslage des elastischen Stabes formal durch dieselbe Beziehung beim Kreisel ausdrücken lassen. Wir wollen mit dem symmetrischen kräftefreien Kreisel beginnen, der um die dritte Hauptachse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiert. Ihm entspricht ein auf Torsion beanspruchter zylindrischer Stab von kreissymmetrischem Querschnitt $C_1 = C_2$. Bekanntlich[1]) ist ein solcher sehr dünner langer Stab nicht mehr im stabilen Gleichgewicht, wenn das Torsionsmoment der Bedingung genügt:

$$M = 2\pi \frac{C_1}{l}, \tag{9}$$

worin $C_1 = C_2 = EJ_1$ die Biegungssteifigkeit des Stabes und l seine Länge bedeuten. Die Mittellinie des Stabes nimmt die Gestalt einer Schraubenlinie an, und zwar ist l die Länge der Schraubenlinie für einen Schraubengang.

Um das kinetische Analogon zu der neuen Gleichgewichtslage, in die der ursprünglich zylindrische Stab bei dem durch Gl. (9) bestimmten Torsionsmoment M übergeht, zu finden, erinnern wir uns an die in Nr. 1 angegebenen Beziehungen zwischen den beiden Hauptkoordinaten-Systemen beim Kreisel und beim elastischen Stab, die einander stets parallel sind. Daraus ergibt sich sofort, daß der kräftefreie symmetrische Kreisel eine Präzessionsbewegung ausführt, und zwar entspricht der Länge l des Stabes, die zu einem vollen Schraubengang gehört, die Dauer T einer vollen Präzession. Man kann demnach auf die verhältnismäßig umständliche Ableitung von Gl. (9) verzichten, wenn man sie aus der altbekannten Beziehung[2]) für die Präzessionsdauer des symmetrischen kräftefreien Kreisels:

[1]) A. Föppl, „Vorlesungen", Bd. V, § 34.

[2]) s. Klein-Sommerfeld, „Theorie d. Kreisels", S. 152, oder R. Grammel, „Der Kreisel", S. 42.

$$T = 2\pi \frac{\Theta_1}{B} \tag{10}$$

ableitet, indem man die entsprechenden Größen für den elastischen Stab einsetzt, woraus sofort Gl. (9) folgt.

Es lassen sich aber auch noch weitere Resultate aus der Übereinstimmung der Gl. (9) und (10) ableiten. Die Dauer der Präzession ist nach Gl. (10) nicht von der Neigung der Figurenachse gegen die Richtung des Dralles, um die die Präzessionsbewegung verläuft, abhängig. Auf den elastischen Stab übertragen, bedeutet dies, daß Gl. (9) auch noch Gültigkeit behält, wenn die beiden Enden des einen vollen Schraubengang bildenden Stabes einander genähert werden, so daß die Ganghöhe der Schraubenlinie mehr und mehr abnimmt und schließlich die Stabmittellinie in einen vollen Kreis übergeht. Bei diesem Übergang bleibt das Endmoment $\mathfrak{M}$ nach Größe und Richtung konstant, ebenso wie der Drall $\mathfrak{B}$ bei der Kreiselbewegung; dabei geht $\mathfrak{M}$ von einem ursprünglich reinen Torsionsmoment schließlich zu einem reinen Biegungsmoment über, das dem zu einem vollen Kreis durch Endmomente verbogenen Stab entspricht. Daß die Größe dieses Biegungsmomentes sich auch noch nach Gl. (9) berechnet, sieht man ohne weiteres, da die Krümmung des Kreises $\varkappa = \frac{1}{r} = \frac{2\pi}{l}$ ist, woraus wegen $M = C_1 \varkappa$ sofort Gl. (9) folgt. Wir können daraus entnehmen, daß ein Stab von kreissymmetrischem Querschnitt durch dieselben Endmomente zu einem vollen Kreis verbogen wird, die als Torsionsmomente das Auskippen des Stabes bewirken. Ferner zeigen die obigen Überlegungen, daß der Übergang von dem ausgekippten Stab zum vollen Kreis durch lauter Gleichgewichtslagen mit indifferentem Gleichgewicht führt. Denn die Schraubenlinien, die zwischen den beiden Endlagen des geraden Stabes und des Vollkreises liegen, können ohne Arbeit der äußeren Kräfte ineinander übergehen, da die Momente an den beiden Enden des Schraubenganges stets gleich groß bleiben und ihre unveränderliche Richtung der Schraubenachse parallel

verläuft, so daß sie beim Nähern oder Entfernen der beiden Stabenden keine Arbeit leisten.

In welcher Weise der Steigungswinkel $90^0 - \vartheta$ einer dieser Schraubenlinien mit der Verwindung τ zusammenhängt, geht aus folgender bekannten Beziehung der Kreiseltheorie hervor, durch die sich der Neigungswinkel ϑ der Figurenachse gegen die Drallrichtung berechnet:

$$\cos\vartheta = \frac{\Theta_3 u_3}{B}.$$

Umgeschrieben lautet diese Gleichung für den elastischen Stab:

$$\cos\vartheta = \frac{C_3 \tau}{M} = \frac{C_3}{C_1} \cdot \frac{l}{2\pi} \cdot \tau, \tag{11}$$

in der die Grenzfälle der reinen Torsion ($\vartheta = 0$) und der reinen Biegung ($\vartheta = 90^0$) mit enthalten sind.

Wir wollen nun versuchen, die für den Stab mit kreissymmetrischem Querschnitt gewonnenen Resultate auf einen Stab von beliebigem Querschnitt, der auf Torsion beansprucht wird, zu übertragen. Zu dem Zweck gehen wir von dem entsprechenden Kreiselproblem aus. Dem geraden, auf Torsion beanspruchten Stab entspricht ein kräftefreier Kreisel, der um die Hauptachse mit dem Trägheitsmoment Θ_3 gleichmäßig rotiert. Wie oben, wird aus der Präzessionsbewegung dieses Kreisels, die durch das Abrollen des Poinsotellipsoids auf der unveränderlichen Ebene veranschaulicht wird, die Größe des kritischen Torsionsmomentes sich berechnen lassen. Nennen wir $\frac{d\psi}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit der Präzessionsbewegung um die im Raum unveränderliche Drallrichtung, so ist[1])

$$\frac{d\psi}{dt} = B \cdot \frac{\Theta_1 u_1^2 + \Theta_2 u_2^2}{B^2 - \Theta_3^2 u_3^2},$$

woraus die Präzessionsdauer T sich aus der folgenden Gleichung bestimmt:

[1]) Klein-Sommerfeld, S. 150, oder R. Grammel, „Der Kreisel", S. 49.

$$2\pi = B \cdot \int_0^T \frac{\Theta_1 u_1^2 + \Theta_2 u_2^2}{B^2 - \Theta_3^2 u_3^2} dt. \tag{12}$$

Die entsprechende Gleichung für den Stab lautet:

$$2\pi = M \cdot \int_0^l \frac{C_1 \varkappa_1^2 + C_2 \varkappa_2^2}{M^2 - C_3^2 \tau^2} ds, \tag{13}$$

oder, indem man nach Gl. (5)

$$M^2 = C_1^2 \varkappa_1^2 + C_2^2 \varkappa_2^2 + C_3^2 \tau^2$$

einsetzt:

$$2\pi = M \cdot \int_0^l \frac{C_1 \varkappa_1^2 + C_2 \varkappa_2^2}{C_1^2 \varkappa_1^2 + C_2^2 \varkappa_2^2} ds. \tag{14}$$

Zunächst sieht man dieser allgemeinen Formel an, daß sie für den Fall der Kreissymmetrie des Querschnittes ($C_1 = C_2$) in Gl. (9) übergeht.

Wir wollen Gl. (14) für den Fall eines elliptischen oder rechteckigen Querschnittes anwenden, für den die Torsionssteifigkeit C_3 ihrer Größe nach zwischen den beiden Biegungssteifigkeiten C_1 und C_2 liegt, so daß die Ungleichung

$$C_1 > C_3 > C_2 \tag{15}$$

gilt, wofür wir beim elliptischen Querschnitt mit den beiden Hauptachsen $2b$ und $2a$ auch schreiben können:

$$E \frac{\pi a b^3}{4} > G \frac{\pi a b (a^2 + b^2)}{4} > E \frac{\pi b a^3}{4},$$

oder:

$$\frac{b^2}{a^2 + b^2} > \frac{G}{E} > \frac{a^2}{a^2 + b^2}.$$

Diese Ungleichung besteht bei allen schlanken Ellipsen und, wie man sofort sieht, auch schon für das Verhältnis $\frac{b}{a} = 2$ der beiden Ellipsenachsen. Dieselbe Ungleichung (15) gilt für alle rechteckigen Querschnitte, die nicht zu nahe einem Quadrat sind.

Wir schreiben die entsprechende Beziehung für die Trägheitsmomente des kräftefreien Kreisels an:

$$\Theta_1 > \Theta_3 > \Theta_2 . \tag{16}$$

Der Torsion des Stabes entspricht die Rotation des Kreisels um die Hauptachse des mittleren Trägheitsmomentes Θ_3. Diese Rotation ist bekanntlich labil. Sie geht über in die in der Kreiseltheorie unter dem Namen der trennenden Polhodie bekannte Bewegung. Für sie läßt sich Gl. (12) vereinfachen, da in diesem Fall[1])

$$B^2 = 2\,\Theta_3\,T \text{ bzw. } M^2 = 2\,C_3\,A \tag{17}$$

gilt, wobei an Stelle der kinetischen Energie

$$T = \tfrac{1}{2}\,(\Theta_1\,u_1^2 + \Theta_2\,u_2^2 + \Theta_3\,u_3^2)$$

die spezifische Formänderungsarbeit

$$A = \tfrac{1}{2}\,(C_1\,\varkappa_1^2 + C_2\,\varkappa_2^2 + C_3\,\tau^2)$$

beim Stab getreten ist. Unter Benützung von Gl. (17) läßt sich das Integral in Gl. (13) zu $\frac{l}{C_3}$ auswerten, so daß sich in diesem Fall das kritische Torsionsmoment berechnet zu:

$$M = 2\,\pi\,\frac{C_3}{l}, \tag{18}$$

also entsprechend wie im Fall eines kreissymmetrischen Querschnittes nach Gl. (9), nur mit dem Unterschied, daß hier die Torsionssteifigkeit C_3, dort aber die Biegungssteifigkeit C_1 auftritt. Setzt man in Gl. (18) $M = C_3\,\tau$ ein, so ergibt sich $\tau\,l = 2\,\pi$, d. h. das kritische Torsionsmoment M ist gerade so groß, daß sich die beiden Endquerschnitte unter dem Winkel $2\,\pi$ gegeneinander verdrehen.

---

[1]) R. Grammel, „Der Kreisel“, S. 51 ff.

§ 3. Die Analogie zum schweren symmetrischen Kreisel.

Die Analogie zwischen der Bewegung des schweren Kreisels und der Gleichgewichtsfigur eines nur an den Enden durch Momente und Einzelkräfte beanspruchten elastischen Drahtes ist schon in § 1 auf Grund der Übereinstimmung der Gl. (2) bzw. (3) mit den Gl. (6) bzw. (7) ausgesprochen worden. Beim schweren symmetrischen Kreisel sind die Trägheitsmomente Θ_1 und Θ_2 einander gleich und der Schwerpunkt liegt auf der Figurenachse mit dem Trägheitsmoment Θ_3 im Abstand 1 vom Unterstützungspunkt. Ihm entspricht ein elastischer Draht von kreissymmetrischem Querschnitt, dessen beide Enden entsprechend dem Gewicht des Kreisels durch gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kräfte beansprucht werden, wozu noch Momente hinzutreten können. Das wesentlich Neue gegenüber den Untersuchungen von § 2 sind die Endkräfte, deren Richtung, wie die Analogie lehrt, mit der des Kreiselgewichtes übereinstimmt.

Der einfachste Fall einer Kreiselbewegung ist die eines Pendels. Betrachten wir zunächst eine ebene Pendelschwingung um eine Achse mit dem Trägheitsmoment $\Theta_1 = \Theta_2$. Wird der Ausschlag der Figurenachse gegen die Vertikale mit ϑ bezeichnet, so lautet die Differentialgleichung der Pendelschwingung:

$$\Theta_1 \frac{d^2 \vartheta}{d t^2} = - P \sin \vartheta . \tag{19}$$

Betrachtet man andererseits einen ursprünglich geraden Stab von der Biegungssteifigkeit C_1, der infolge eines achsialen Druckes P ausgeknickt ist und dessen Tangente mit der Lastrichtung jeweils den Winkel ϑ einschließt, so lautet die Differentialgleichung der elastischen Linie:

$$C_1 \frac{d\vartheta}{ds} = - P y ,$$

wenn mit y der senkrechte Abstand eines Punktes der elastischen Linie von der Lastrichtung bezeichnet wird. Wegen $\frac{dy}{ds} = \sin \vartheta$ geht aus der letzten Gleichung durch Differentiation

$$C_1 \frac{d^2 \vartheta}{d s^2} = - P \sin \vartheta \tag{20}$$

hervor. Diese Gleichung stimmt aber mit der Schwingungsgleichung (19) formal vollkommen überein. Daraus folgt, daß die verschiedenen Formen der ebenen Elastica den ebenen Pendelschwingungen mit verschiedenen Ausschlägen entsprechen. Da die Richtung der Figurenachse des Pendels mit der Richtung der Tangente an die elastische Linie übereinstimmt, so entspricht der Dauer einer Halbschwingung des Pendels die Länge der elastischen Linie. Für sehr kleine Ausschläge ϑ kann man in Gl. (19) und (20) $\sin \vartheta$ durch ϑ angenähert ersetzen und dann ergibt sich durch einfache Rechnung der Wert der halben Schwingungsdauer zu

$$T = \pi \sqrt{\frac{\Theta_1}{P}},$$

woraus durch Übertragung auf den elastischen Stab die Eulersche Knicklast

$$P_\varkappa = \frac{\pi^2}{l^2} C_1$$

folgt. Diese Überlegungen sind schon in ähnlicher Form von Kirchhoff angestellt worden. Es ist klar, daß sie nicht auf den Fall eines symmetrischen Pendels beschränkt sind, sondern ebenso gelten, wenn der Körper um eine seiner beiden Hauptachsen mit den Trägheitsmomenten Θ_1 und Θ_2, die voneinander verschieden sein können, Schwingungen ausführt. Den beiden verschiedenen Schwingungen um diese beiden Hauptachsen entspricht beim elastischen Analogon der Stab mit den Biegungssteifigkeiten C_1 und C_2 in den Hauptrichtungen, der einmal in der einen Hauptebene, das andere Mal in der dazu senkrechten ausgeknickt ist. Von den beiden Möglichkeiten des Ausknickens ist jedoch nur die zur kleineren Biegungssteifigkeit gehörige stabil. Es liegt nahe, diese Überlegung auf das nur in einem Punkt gelagerte Pendel, das um eine der beiden Hauptachsen schwingt, zu übertragen. Diese Andeutungen

mögen hier jedoch genügen, da uns ein weiteres Eingehen auf diese spezielle Frage zu weit abführen würde.

Die nach der ebenen Pendelbewegung nächst einfache Kreiselbewegung ist die eines Raumpendels. Hier tritt die vorausgesetzte Symmetrie des Kreisels sehr wesentlich in die Erscheinung. Eine mögliche Bewegungsform des symmetrischen Raumpendels ist die gleichförmige Bewegung irgend eines seiner Punkte auf einem Kreis um die Vertikale durch den Aufhängepunkt, so daß die Verbindungslinie vom Aufhängepunkt mit dem Schwerpunkt einen Kreiskegel von vertikaler Achse bei gleich bleibender Geschwindigkeit durchläuft. Dieser Bewegung muß ein ursprünglich gerader elastischer Draht entsprechen, dessen Mittellinie die Gestalt einer Schraubenlinie angenommen hat, wobei einem Umlauf des Pendels um die Vertikale durch den Aufhängepunkt ein voller Schraubengang entspricht. Der Drehvektor dieser Pendelbewegung liegt dauernd in der Vertikalen durch den festgehaltenen Punkt des Kreisels. Seine zeitlich konstante Größe, die sogenannte Präzessionsgeschwindigkeit, sei mit μ bezeichnet; dann berechnet sich μ zu[1])

$$\mu = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{P}{(\Theta_3 - \Theta_1)\cos\vartheta}},$$

worin P das Kreiselgewicht, das im Abstand 1 vom Aufhängepunkt auf der Figurenachse angreift und ϑ den halben Öffnungswinkel des von der Figurenachse beschriebenen Kegels bedeutet. Die entsprechende Formel für den zu einem vollen Schraubengang verbogenen Draht von kreissymmetrischem Querschnitt ($C_1 = C_2$) lautet:

$$\frac{2\pi}{l} = \sqrt{\frac{P}{(C_3 - C_1)\cos\vartheta}}.$$

Darin bedeutet l die Länge der Schraubenlinie, ϑ den Winkel der Tangente an die Schraubenlinie mit der Schraubenachse und P die Kraft an den Enden des Drahtes. Statt der letzten Gleichung kann man auch unter Einführen des Radius

[1]) R. Grammel, „Der Kreisel", S. 91.

$r = \frac{l}{2\pi} \sin\vartheta$ des Kreiszylinders, auf dem die Schraubenlinie liegt, schreiben:

$$P = \frac{\sin^2\vartheta \cdot \cos\vartheta}{r^2} (C_3 - C_1). \tag{21}$$

Außer dieser Kraft, die an den Drahtenden parallel zur Schraubenachse wirkt, greifen Endmomente an. Man erkennt dies sofort aus dem entsprechenden Kreiselproblem: denn der Drall $\mathfrak{B}$ entspricht dem Moment. Da $\mathfrak{B}$ in der jeweiligen Vertikalebene durch die Figurenachse liegt, so bedeutet dies für das Moment beim Draht, daß der Vektor $\mathfrak{M}$ in der Tangentialebene an den zur Schraubenlinie gehörenden Kreiszylinder gelegen ist. Da der Drall $\mathfrak{B}$ die Komponenten $B_3 = \Theta_3 u_3 = \Theta_3 \mu \cos\vartheta$ in der Figurenachse und $B_{1,2} = \Theta_1 \mu \sin\vartheta$ in der dazu senkrechten Richtung besitzt, so sind die entsprechenden Momente $M_3 = C_3 \tau = C_3 \frac{\sin\vartheta \cdot \cos\vartheta}{r}$ das Torsionsmoment und $M_{1,2} = C_1 \cdot \frac{\sin^2\vartheta}{r}$ das Biegungsmoment. Berechnet man hieraus die Komponenten von $\mathfrak{M}$ parallel und senkrecht zur Schraubenachse, so ergibt sich für die Komponente des Momentes parallel zur Schraubenachse:

$$M_I = M_3 \cos\vartheta + M_{1,2} \sin\vartheta = \frac{\sin\vartheta}{r} (C_1 \sin^2\vartheta + C_3 \cos^2\vartheta) \tag{22}$$

und für die Komponente senkrecht zur Schraubenachse wegen Gl. (21)

$$M_{II} = M_3 \sin\vartheta - M_{1,2} \cos\vartheta = P \cdot r, \tag{23}$$

so daß die an den Drahtenden wirkenden Kräfte und Momente auf je eine Kraftschraube zurückgeführt sind, deren Achse mit der Achse der Schraubenlinie, in die der Stab verbogen wird, übereinstimmt.

Für $\vartheta = 90^0$ geht die Schraubenlinie in einen Kreis vom Radius $r = \frac{l}{2\pi}$ über, der nur durch das Endmoment $M_I = \frac{C_1}{r}$ verbogen ist, während P und M_{II} verschwinden.

In dem Fall, daß die Endkraft P verschwindet und nur Endmomente wirken, kommen wir auf die Untersuchungen von § 2 zurück. Dort ergab sich, daß der ursprünglich gerade Stab von seiner geraden Gestalt in eine beliebige Schraubenlinie und schließlich in den Kreis bei konstantem Momentenvektor übergeführt werden konnte. Hier, wo auch noch Endkräfte P angenommen sind, entsprechen den verschiedenen Schraubenlinien, in die der ursprünglich gerade Stab übergehen kann, verschiedene Endkräfte P und Endmomente M, die gemäß den Gl. (21) bis (23) von der Neigung der Schraubenlinie abhängen.

Um die Werte von P und M zu bestimmen, die für den geraden Stab kritisch sind und ihn labil machen, setzen wir in die obigen Formeln (21) bis (23) $\vartheta = 0$ ein. Es ergibt sich dann $M_{II} = 0$ und

$$P_0 = \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \cdot (C_3 - C_1), \tag{24}$$

$$M_I = M_0 = \frac{2\pi}{l} \cdot C_3, \tag{25}$$

woraus

$$\frac{P_0}{M_3^2} = \frac{C_3 - C_1}{C_3^2} \tag{26}$$

folgt. Was die Größenverhältnisse von C_1 und C_3 betrifft, so ist bei dem hier vorausgesetzten kreissymmetrischen Querschnitt $C_3 < C_1$; denn

$$\frac{C_3}{C_1} = \frac{G \cdot J_p}{E \cdot J} = \frac{G \cdot 2J}{E \cdot J} = 2\frac{G}{E} = \frac{m}{m+1} < 1.$$

Darin bedeuten G und E Schub- bzw. Zugelastizitätsmodul, J_p und J polares bzw. achsiales Trägheitsmoment des kreissymmetrischen Querschnitts, für den $J_p = 2J$ gilt, und m ist die Poissonsche Konstante.

Der Wert des kritischen Drehmomentes M_0 ist nach Gl. (25) kleiner als der nach Gl. (9) von § 2 berechnete Wert und zwar ist er so bemessen, daß sich die Endquerschnitte des geraden Stabes um eine volle Umdrehung 2π gegeneinander ver-

drehen. Zu diesem Torsionsmoment tritt aber hier noch eine achsiale Kraft, die das Auskippen unterstützt, also eine Drucklast, die sich nach Gl. (24) der Größe und dem Vorzeichen nach berechnen läßt.

Vergleicht man die Endkräfte und Endmomente, die den Schraubenlinien bei verschiedenen Neigungswinkeln ϑ entsprechen, nach den Gl. (21) bis (23) mit den Werten P_0 und M_0, so ergibt sich wegen $\frac{\sin\vartheta}{r} = \frac{2\pi}{l}$, daß mit zunehmender Zusammendrückung der Schraubenlinie die entlang der Schraubenachse wirkende Druckkraft P proportional mit $\cos\vartheta$ abnimmt, während das Achsenmoment im Verhältnis

$$\frac{C_1 \sin^2\vartheta + C_3 \cos^2\vartheta}{C_3}$$

zunimmt. Der oben besprochene Fall war als Analogon zur räumlichen Pendelbewegung des symmetrischen schweren Kreisels gewonnen worden. Wie diese letztere nur einen speziellen Fall der Präzessionsbewegung des schweren symmetrischen Kreisels darstellt, so gilt etwas Entsprechendes, von den obigen Schraubenlinien, in die der ursprünglich gerade Stab bei passend gewählten Endkräften und Endmomenten übergeht. In der Tat läßt sich für jede Schraubenlinie, die durch den Winkel ϑ charakterisiert ist, nach den Gl. (21) bis (23) ein ganz bestimmter Wert der Endkraft und des Endmomentes angeben; dagegen ist bei gegebener Endkraft die Frage nach der Größe des Endmomentes, um eine bestimmte Schraubenlinie zu erhalten, noch nicht gelöst. Die Antwort auf diese Frage gibt uns das Analogon zur allgemeinen Präzessionsbewegung des schweren symmetrischen Kreisels.

Nennen wir $\mu = \frac{2\pi}{T}$ die Präzessionsgeschwindigkeit mit der Periode T und ν die Drehgeschwindigkeit des Kreisels um seine Figurenachse, so gilt die Beziehung[1]):

$$P = \Theta_3 \mu (\nu + \mu \cos\vartheta) - \Theta_1 \mu^2 \cos\vartheta. \qquad (27)$$

[1]) R. Grammel, „Der Kreisel“, S. 89.

Bei der Bedeutung des Winkels ϑ als Neigung der Figurenachse gegen die Vertikale durch den festen Kreiselpunkt hängt die Winkelgeschwindigkeit u_3 um die Figurenachse mit μ und ν folgendermaßen zusammen:

$$\nu + \mu \cos\vartheta = u_3 .$$

Die Gl. (27) entsprechende Gleichung für den elastischen Draht lautet daher:

$$P = C_3 \frac{2\pi}{l} \tau - C_1 \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \cos\vartheta , \tag{28}$$

in die auch der Radius $r = \frac{l}{2\pi} \sin\vartheta$ des Kreiszylinders, auf dem die Schraubenlinie liegt, eingesetzt werden kann. Dazu treten Endmomente, wie man sofort aus der Kreiselaufgabe entnimmt, wo der Drall den Momenten entspricht, und zwar liegt der Momentenvektor ebenso wie früher in der Tangentialebene an den Kreiszylinder. Den Drallkomponenten $B_3 = \Theta_3 u_3$ parallel der Figurenachse und $B_{1,2} = \Theta_1 \mu \sin\vartheta$ in der dazu senkrechten Richtung entsprechen das Torsionsmoment $M_3 = C_3 \tau$ und das Biegungsmoment $M_{1,2} = C_1 \frac{2\pi}{l} \sin\vartheta = C_1 \frac{\sin^2\vartheta}{r}$.
Hieraus berechnet sich die Komponente des Momentes parallel zur Schraubenachse:

$$M_I = M_3 \cos\vartheta + M_{1,2} \sin\vartheta = C_3 \tau \cos\vartheta + C_1 \frac{2\pi}{l} \sin^2\vartheta ,$$

oder wegen Gl. (28):

$$M_I = P \frac{l}{2\pi} \cos\vartheta + C_1 \frac{2\pi}{l} . \tag{29}$$

Die Komponente des Momentes senkrecht zur Schraubenachse ist:

$$M_{II} = M_3 \sin\vartheta - M_{1,2} \cos\vartheta = C_3 \tau \sin\vartheta - C_1 \frac{2\pi}{l} \sin\vartheta \cos\vartheta$$

oder wegen Gl. (28):

$$M_{II} = P \frac{l}{2\pi} \sin\vartheta = Pr . \tag{30}$$

Die Endkräfte sind demnach ebenso wie im vorigen Fall zurückgeführt auf je eine Kraftschraube, deren Achse mit der Schraubenachse zusammenfällt. Die Größe der Kraft P in Richtung der Schraubenachse ist durch Gl. (28) und die Größe des Momentes um die Achse durch Gl. (29) in Abhängigkeit von der Neigung der Schraubenlinie bestimmt. Der vorher untersuchte Fall, der das Analogon zum Raumpendel darstellte, ist in diesem allgemeineren Fall enthalten und geht daraus hervor, wenn man $\tau = \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{r} = \frac{2\pi}{l}\cos\vartheta$ in die Gl. (28) und (29) einsetzt, womit man die Gl. (21) und (22) erhält.

Wir wollen noch die Grenzfälle untersuchen und setzten zunächst $\vartheta = 90^0$, wodurch die Schraubenlinie in einen vollen Kreis ausartet. Die Gl. (28) bis (30) zeigen, daß diese Gestalt des Drahtes möglich ist, wobei an den Enden ein Biegungsmoment von der Größe $\frac{C_1}{r}$, eine Kraft senkrecht zur Kreisebene von der Größe $C_3\frac{\tau}{r}$ und ein Torsionsmoment von der Größe $C_3\tau$ angreifen, wobei die Größe des Verdrehungswinkels τ ganz beliebig ist. Mit $\tau = 0$ erhält man den früher besprochenen Fall der einfachen Biegung.

Von besonderer Bedeutung ist der andere Grenzfall $\vartheta = 0$, da er die kritischen Werte der achsialen Kraft P_0 und des achsialen Verdrehungsmomentes M_0, die den ursprünglich geraden Stab labil machen, in Beziehung setzt. Aus den Gl. (28) und (29) ergibt sich:

$$P_0 = C_3\frac{2\pi}{l}\tau - C_1\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \tag{31}$$

und

$$M_I = M_0 = P_0\frac{l}{2\pi} + C_1\frac{2\pi}{l}, \tag{32}$$

während $M_{II} = 0$ wird. Mit $\tau = \frac{2\pi}{l}$ wird hieraus der frühere Spezialfall erhalten, so daß damit aus den Gl. (31) und (32) die Gl. (24) und (25) hervorgehen.

Vor allen Dingen ist Gl. (32) bedeutungsvoll, die uns die Beziehung zwischen der kritischen Last und dem kritischen Verdrehungsmoment angibt. Wir wollen sie folgendermaßen schreiben:

$$C_1 \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 = M_0 \frac{2\pi}{l} - P_0. \tag{33}$$

Für $P_0 = 0$ ergibt sich als Spezialfall das kritische Moment von Gl. (9). Da bei positivem P_0 der kritische Wert von M_0 wächst, so sieht man, daß P_0 eine Zugkraft an den Stabenden bedeutet. Für $M_0 = 0$ müßte P_0 in den Wert der Eulerschen Knicklast übergehen. In Wirklichkeit gibt Gl. (33) den vierfachen Wert, d. h. den Wert der Knicklast, wenn der Stab nach einer vollen Welle, also zwei Halbwellen, ausknicken würde. Dieses Ergebnis war zu erwarten, wenn wir uns daran erinnern, daß der unter einer Achsiallast ausgeknickte Stab einer halben Schwingung eines Pendels entspricht, so daß die volle Schwingung die Analogie eines geknickten Stabes mit zwei Halbwellen darstellt. Setzen wir daher $R_0 = -\frac{P_0}{4}$, so ergibt sich die folgende wichtige Beziehung:

$$C_1 \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 = M_0 \frac{\pi}{2l} + R_0,$$

die mit $M_0 = 0$ den Grenzfall der Eulerschen Knicklast und mit $R_0 = 0$ den anderen Grenzfall des kritischen Torsionsmomentes in sich schließt.

Über den Hauptsatz aus der Theorie der konformen Abbildung.

Von Georg Faber.

Vorgetragen in der Sitzung am 4. März 1922.

Wenn ich im folgenden den allmählich recht zahlreich gewordenen Beweisen für den Hauptsatz aus der Theorie der konformen Abbildung einen neuen hinzufüge, so mag dies Beginnen dadurch gerechtfertigt erscheinen, daß mein Beweis besonders einfach und rein funktionentheoretisch ist, sowie dadurch, daß gleichzeitig für die Frage der Ränderzuordnung eine neue Lösung von sehr durchsichtigem Gedankengang[1]) gegeben wird.

Den zu beweisenden Hauptsatz formuliere ich so:

$\mathfrak{g}$ sei ein einfach zusammenhängendes, den Punkt $z = 0$ enthaltendes, endliches Gebiet der z-Ebene; es liege also ein Kreisgebiet

1) $$|z| < \gamma$$

ganz in $\mathfrak{g}$, während andrerseits $\mathfrak{g}$ ganz in einem Kreisgebiete

2) $$|z| < \Gamma \qquad (\Gamma > \gamma)$$

enthalten sei. Dann gibt es eine und nur eine Potenzreihe

---

[1]) Wie ich nachträglich bemerkte, benutzte schon Herr Courant (Gött. Nachr. 1914) Überlegungen, die, wenn auch in ganz anderer Darstellung, eine gewisse Verwandtschaft mit den meinen besitzen.

3) $$z = \mathfrak{P}(Z) = Z + a_2 Z^2 + a_3 Z^3 + \cdots$$

mit folgenden Eigenschaften:

a) $\mathfrak{P}(0) = 0$, $\mathfrak{P}'(0) = 1$;

b) $\mathfrak{P}(Z)$ nimmt in einem gewissen Kreisgebiete

4) $$|Z| < \varrho,$$

dessen Radius ϱ völlig bestimmt ist, jeden Wert z aus $\mathfrak{g}$ einmal und nur einmal an. Die Umkehrfunktion der Reihe (3)

5) $$Z = f(z)$$

ist also eine in $\mathfrak{g}$ reguläre Funktion, die daselbst jeden Wert Z, dessen Betrag $< \varrho$ ist, gerade einmal annimmt.

Ich mache beim Beweise dieses Satzes noch die Voraussetzung, daß $\mathfrak{g}$ von einer einfachen Jordan-Kurve begrenzt ist. Von dieser Voraussetzung kann man sich leicht hinterher durch einen weiteren Grenzübergang befreien und so den Beweis des Hauptsatzes auf beliebige einfach zusammenhängende Gebiete ausdehnen.

Daß der Rand von $\mathfrak{g}$ eine Jordan-Kurve sei, wird übrigens nur beim Beweise des folgenden Hilfssatzes benutzt.

I. Hilfssatz: Ist $\mathfrak{g}$ echtes Teilgebiet eines anderen endlichen Gebietes $\mathfrak{b}$, so hat $\mathfrak{b}$ Randpunkte, die äußere Punkte für $\mathfrak{g}$ sind.

Weil nämlich weder die $\mathfrak{g}$ begrenzende Jordan-Kurve C noch ein Stück von C den ganzen Rand eines von $\mathfrak{g}$ verschiedenen Gebietes bilden kann, müssen zum Rande von $\mathfrak{b}$ Punkte gehören, die weder C, noch auch, da ja $\mathfrak{g}$ Teilgebiet von $\mathfrak{b}$ sein soll, $\mathfrak{g}$ angehören, die also äußere für $\mathfrak{g}$ sind.

Im folgenden ersten Paragraphen beweise ich den Hauptsatz; auf die Frage der Ränderzuordnung gehe ich dann in einem zweiten Paragraphen ein.

§ I. Beweis des Hauptsatzes.

Es gibt jedenfalls unendlich viele Gebiete $\mathfrak{d}$, die durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet sind:

a) alle $\mathfrak{d}$ liegen ganz im Endlichen, etwa innerhalb der Kreislinie $|z| = 2\Gamma$ (vgl. (2)); alle $\mathfrak{d}$ enthalten den Nullpunkt;

b) es gibt für jedes $\mathfrak{d}$ eine Funktion $Z = F(z)$ mit der Umkehrung $z = \mathfrak{p}(Z)$, wodurch $\mathfrak{d}$ unter Beachtung der Nebenbedingungen $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$ auf ein Kreisgebiet $|Z| < r$ abgebildet wird;

c) $\mathfrak{g}$ ist Teilgebiet von jedem $\mathfrak{d}$ und zwar echtes oder unechtes.

Bewiesen soll eben werden, daß letztere Möglichkeit Wirklichkeit ist, d. h. daß $\mathfrak{g}$ selbst ein Gebiet $\mathfrak{d}$ ist.

Die unter b) erwähnten Radien r sind alle $\leqq 2\Gamma$ und $> \gamma$, wie man leicht mittels des sog. Schwarzschen Lemmas erkennt; die Radien r haben somit eine endliche von Null verschiedene untere Grenze ϱ. Ich behaupte nun:

α) Es gibt ein Gebiet $\mathfrak{d}$, für welches $r = \varrho$ ist.

β) Dieses Gebiet $\mathfrak{d}$ ist mit $\mathfrak{g}$ identisch.

Beweis von α): Wäre für kein Gebiet $\mathfrak{d}$ der zugehörige Radius $r = \varrho$, so gäbe es unendlich viele solche Gebiete $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2, \ldots$, deren Radien $r_1, r_2, \ldots$ die Bedingung $\lim\limits_{n \to \infty} r_n = \varrho$ erfüllen. Nach einem bekannten Montelschen Satze dürfen wir außerdem annehmen, daß die zugehörigen Potenzreihen $\mathfrak{p}_1(Z)$, $\mathfrak{p}_2(Z), \ldots$ im Gebiete $|Z| < \varrho$ gegen eine Grenzfunktion $\mathfrak{p}(Z) = \lim\limits_{n \to \infty} \mathfrak{p}_n(Z)$ mit $\mathfrak{p}(0) = 0$, $\mathfrak{p}'(0) = 1$ konvergieren. Durch $z = \mathfrak{p}(Z)$ wird das Gebiet $|Z| < \varrho$ auf ein einfach zusammenhängendes schlichtes Gebiet $\mathfrak{e}$ der z-Ebene abgebildet; wegen des sehr einfachen Beweises darf ich auf Caratheodory, Math. Ann., Bd. 72 (1912), S. 120/21 verweisen. $\mathfrak{e}$ liegt offenbar innerhalb der Kreislinie $|z| = 2\Gamma$. Zum vollen Beweise von α genügt es, somit zu zeigen, daß $\mathfrak{g}$ ein Teil von $\mathfrak{e}$ ist, also daß $|F(z_1)| < \varrho$ ist, für irgend einen Punkt z_1 von $\mathfrak{g}$,

wenn $Z = F(z)$ die Umkehrfunktion von $z = \mathfrak{p}(Z)$ bedeutet. Ist nämlich $Z = F_n(z)$ die Umkehrfunktion von $z = \mathfrak{p}_n(Z)$, so folgt (wegen $|F_n(z_1)| < r_n$, $\lim_{n \to \infty} F_n(z_1) = F(z_1)$ und $\lim_{n \to \infty} r_n = \varrho$) zunächst:

$$6) \qquad |F(z_1)| \leq \varrho .$$

Hier kann aber das Zeichen $=$ nicht gelten, denn dann gäbe es Punkte z_2 in $\mathfrak{g}$ und in der Umgebung von z_1, für die $|F(z_2)| > \varrho$ wäre im Widerspruch mit der soeben bewiesenen Ungleichung (6), die für z_2 genau so gilt wie für z_1.

Beweis von β): Wir nehmen an, $\mathfrak{b}$ sei, wie soeben, ein schlichter, einfach zusammenhängender Bereich der z-Ebene, der durch

$$7) \qquad Z = F(z), \qquad z = \mathfrak{p}(Z)$$

auf den Kreisbereich $|Z| < \varrho$ abgebildet werde (mit Beachtung der Nebenbedingungen: $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$); $\mathfrak{g}$ sei Teilgebiet von $\mathfrak{b}$, ϱ der unter α) festgestellte Minimalradius. Dann haben wir zu zeigen, daß die Annahme, $\mathfrak{g}$ sei ein echtes Teilgebiet von $\mathfrak{b}$, auf einen Widerspruch führt. Unter dieser Annahme könnte man zwei voneinander verschiedene, außerhalb $\mathfrak{g}$ gelegene Randpunkte a, b von $\mathfrak{b}$ (vgl. Hilfssatz I) durch einen außerhalb $\mathfrak{g}$ verlaufenden Querschnitt von $\mathfrak{b}$ miteinander verbinden und so von $\mathfrak{b}$ ein Gebiet $\mathfrak{t}$ abtrennen, von dem kein innerer und kein Randpunkt dem Gebiet $\mathfrak{g}$ angehört. Nun benutze ich folgenden

II. Hilfssatz: Das Bild des Querschnitts $a \ldots b$ ist vermöge (7) in der Z-Ebene ein Querschnitt $A \ldots B$ des Kreisgebietes $|Z| < \varrho$. A, B sind voneinander verschiedene Punkte der Kreislinie $|Z| = \varrho$.

Ich darf mich für diesen Hilfssatz weder auf den Beweis des Herrn Caratheodory noch auf den des Herrn Koebe stützen, da beide den hier zu beweisenden Hauptsatz benutzen. Dagegen könnte ich mich auf den Lindelöfschen Beweis berufen; doch werde ich, um die vorliegende Untersuchung abzurunden, im zweiten Paragraphen einen neuen, sehr einfachen Beweis mitteilen.

Nach dem Hilfssatze entspricht dem Gebiete $\mathfrak{t}$ ein Gebiet $\mathfrak{T}$ der Z-Ebene, zu dessen Begrenzung ein Bogen $A \ldots B$ der Kreislinie $|Z| = \varrho$ gehört, und man kann dann zwei untereinander und von A, B verschiedene Punkte D, E dieses Bogens so nahe aneinander wählen, daß die durch D und E gehende Kreislinie, die den Kreis $|Z| = \varrho$ senkrecht schneidet, von dem Kreisgebiet $|Z| < \varrho$ ein Stück wegschneidet, das ganz dem Gebiete $\mathfrak{T}$ angehört, also keine Bildpunkte des Gebietes $\mathfrak{g}$ enthält. Das nach diesem Wegschneiden vom Gebiete $|Z| < \varrho$ verbleibende Restgebiet möge $\mathfrak{R}$ heißen.

Ich zeige nun, daß es eine Funktion

8) $$Z_1 = \psi(Z),$$

die den Nebenbedingungen

9) $$\psi(0) = 0, \qquad \psi'(0) = 1$$

genügt, und durch welche $\mathfrak{R}$ auf ein Kreisgebiet $|Z_1| < \varrho'$ abgebildet wird; man erkennt auf Grund des Schwarzschen Lemmas sofort, daß dann $\varrho' < \varrho$ ist. Besitzt man aber die Funktion (8), so kann man durch

10) $$Z_1 = \psi(F(z)),$$

wo $F(z)$ die gleiche Bedeutung hat wie in (7), ein Gebiet $\mathfrak{d}_1$ der z-Ebene, in dem $\mathfrak{g}$ als Teilgebiet enthalten ist, unter Beachtung der Nebenbedingungen

11) $$\left(\frac{dZ_1}{dz}\right)_{z=0} = 1, \qquad Z_1 = 0 \text{ für } z = 0$$

auf ein Kreisgebiet $|Z_1| < \varrho' < \varrho$ abbilden, was im Widerspruch damit steht, daß ϱ die untere Grenze dieser Radien bedeutet.

Es bleibt also nur noch der Existenzbeweis für die Funktion $\psi(Z)$ (8) übrig; man könnte sie leicht in geschlossener Form hinschreiben; doch genügt es offenbar, zu zeigen, daß man das Gebiet $\mathfrak{R}$ auf irgend ein Kreisgebiet $\mathfrak{K}$ der u-Ebene durch eine Funktion

12) $$u = \chi(Z)$$

abbilden kann; denn dann findet man leicht die den Nebenbedingungen (9) genügende Funktion $\psi(Z)$ als lineare Funktion von $\chi(Z)$. Somit haben wir nur noch zu zeigen, daß man $\mathfrak{R}$ oder ein dazu ähnliches Gebiet $\mathfrak{R}_1$ auf ein Kreisgebiet konform abbilden kann. $\mathfrak{R}_1$ kann man von zwei Kreisbogen begrenzt denken, die in der oberen (durch die Bedingung: Realteil von $Z > 0$ definierten) Halbebene verlaufen und sich in den Punkten $Z = \pm 1$ rechtwinkelig schneiden. Dieses Gebiet $\mathfrak{R}_1$ wird durch

$$\frac{u-1}{u+1} = \left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)^2 \tag{13}$$

auf ein Kreisgebiet der u-Ebene abgebildet. Man erkennt dies ohne jede Rechnung, wenn man die Substitutionen

$$\frac{u-1}{u+1} = w, \tag{14}$$

$$\frac{Z-1}{Z+1} = v \tag{15}$$

macht und beachtet, daß jenen zwei Kreisbogen vermöge (15) zwei aufeinander senkrechte Halbstrahlen der v-Ebene entsprechen, die durch $w = v^2$ in eine Gerade durch den Punkt 0 der w-Ebene übergehen, und daß einer solchen Geraden vermöge (14) ein Kreis durch die Punkte -1, $+1$ der u-Ebene entspricht.

§ 2. Die Ränderzuordnung.

Zur Ergänzung der voraufgehenden Untersuchung und um den II. Hilfssatz zu beweisen, behandeln wir noch die Frage der Ränderzuordnung bei konformer Abbildung. Durch

$$Z = f(z), \quad \text{aufgelöst } z = \mathfrak{P}(Z), \tag{16}$$

werde das endliche, einfach zusammenhängende, im übrigen aber ganz beliebige Gebiet $\mathfrak{b}$ der z-Ebene auf das Kreisgebiet $|Z| < \varrho$ abgebildet. $q(r)$ seien durch Kreisbogen mit veränderlichem Radius r und festem Mittelpunkt P gebildete Quer-

schnitte des Gebietes $\mathfrak{d}$; P liege auf dem Rand von $\mathfrak{d}$; $\mathfrak{a}(r)$ sei das eine der von $\mathfrak{d}$ durch $q(r)$ abgetrennten Gebiete, und zwar sei, falls $r'' < r'$ ist, $\mathfrak{a}(r'')$ ein Teilgebiet von $\mathfrak{a}(r')$. Mit $\mathfrak{d}(r', r'')$ werde das Gebiet bezeichnet, das man erhält, wenn man aus $\mathfrak{a}(r')$ die Punkte von $\mathfrak{a}(r'')$ und $q(r'')$ wegläßt. In der Z-Ebene seien $Q(r)$, $\mathfrak{A}(r)$, $\mathfrak{D}(r', r'')$ die Bilder von $q(r)$, $\mathfrak{a}(r)$, $\mathfrak{d}(r', r'')$. Ist ein Punkt A der Kreislinie $|Z| = \varrho$ Randpunkt eines Gebietes $\mathfrak{A}(r'')$, so ist er offenbar auch Randpunkt jedes Gebietes $\mathfrak{A}(r')$, wo $r' > r''$.

Alles kommt nun darauf an, zu zeigen:

Es gibt nur einen Punkt der Kreislinie $|Z| = \varrho$, der Randpunkt sämtlicher Gebiete $\mathfrak{A}(r)$ ist, wie klein auch r sein möge.

Gäbe es nämlich mindestens zwei solche Punkte: A, B, so gäbe es auf jedem Querschnitt $Q(r)$ Punkte, deren Entfernung $> l$ wäre, falls unter l irgend eine Zahl verstanden wird, die kleiner ist als die Maßzahl der Sehne AB. Wir zerlegen nun das Gebiet $\mathfrak{d}\left(r', \frac{r'}{2}\right)$ durch die Querschnitte $q(r_1)$, $q(r_2)$, ..., $q(r_{n+1})$, wo

$$r_1 = r', \quad r_{n+1} = \frac{r'}{2} \text{ und}$$

17)
$$r_1 - r_2 = r_2 - r_3 = \cdots = \frac{r_{n+1} - r_n}{n} = \frac{r'}{2n}$$

sein möge, sowie durch Stücke von Radien dieser Querschnitte in Teilgebiete, die wir uns beliebig klein, und soweit sie nicht an den Rand von $\mathfrak{d}$ heranreichen, mit beliebiger Annäherung als untereinander kongruente Quadrate vom Inhalt δ^2 vorstellen dürfen, wo

18)
$$\delta = \frac{r'}{2n} \text{ (vgl. (17)).}$$

Wir lassen im folgenden die an den Rand von $\mathfrak{d}$ heranreichenden Teilbereiche weg und behalten nur die quadratartigen bei. Mit m_i bezeichnen wir die Anzahl derjenigen,

die zwischen $q(r_i)$ und $q(r_{i+1})$ liegen $(i = 1, 2, \ldots n)$; ihre $m_i + 1$ auf $q(r_i)$ gelegenen Ecken seien der Reihe nach: z_{i1}, $z_{i2}, z_{i3}, \ldots, z_{i m_i+1}$. Es ist klar, daß m_i für alle i mindestens gleich 1 ist, falls nur n genügend groß gewählt wurde. Man kann auch n unter fortdauerndem Verzicht auf die weggelassenen, an den Rand von $\mathfrak{b}$ heranreichenden Teilbereiche hinterher weiter vergrößern und damit auch die Anzahl der Eckpunkte z_{ik}, wodurch man erreicht, daß die Summe

$$19)\qquad \sum_1^n{}^i \sum_1^{m_i}{}^k (|f'(z_{ik})|\,\delta)^2,$$

für die wir kürzer

$$20)\qquad \sum_1^n{}^i S_i$$

schreiben, kleiner wird als der Inhalt des Gebietes $\mathfrak{D}\left(r', \frac{r'}{2}\right)$.

Neben den soeben definierten Summen

$$21)\qquad S_i = \sum_1^{m_i}{}^k (|f'(z_{ik})|\,\delta)^2$$

betrachten wir die Summen

$$22)\qquad s_i = \sum_1^{m_i}{}^k |f'(z_{ik})|\,\delta.$$

s_i ist mit beliebiger Annäherung die Bogenlänge eines Stückes von $Q(r_i)$, und man könnte

$$23)\qquad s_i > l$$

setzen, wann der Satz von S. 97 nicht richtig wäre. Nun ist aber

$$24)\qquad S_i \geq \frac{s_i^2}{m_i},$$

da für beliebige positive Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ bekanntlich

$$25)\qquad u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_m^2 \geq \frac{1}{m}(u_1 + u_2 + \cdots + u_m)^2$$

ist. Aus (23), (24) aber würde folgen:

$$26)\qquad S_i > \frac{l^2}{m_i}.$$

Da aber $m_i \delta < 2\pi r_i \leqq 2\pi r' = 4\pi n \delta$ ist (vgl. (18)), so ergibt sich

$$\frac{1}{m_i} > \frac{1}{4\pi n}, \tag{27}$$

also nach (26):

$$S_i > \frac{l^2}{4\pi n}. \tag{28}$$

Der Inhalt des Gebietes $\mathfrak{D}\left(r', \frac{r'}{2}\right)$ wäre somit $> l^2 : 4\pi$. Das gleiche würde für die Gebiete $\mathfrak{D}\left(\frac{r'}{2}, \frac{r'}{4}\right)$, $\mathfrak{D}\left(\frac{r'}{4}, \frac{r'}{8}\right)$ usf. gelten, und man käme so zu dem unsinnigen Ergebnis, daß das Gebiet $\mathfrak{A}(r')$, das ganz in dem Kreisgebiet $|Z| < \varrho$ liegt, einen unendlich großen Inhalt besäße. Somit ist gezeigt:

Einem „Primende“ (Caratheodory) oder „Randelemente“ (Koebe) von $\mathfrak{b}$ entspricht ein bestimmter Punkt A der Kreislinie $|Z| = \varrho$.

Mit genau den nämlichen Überlegungen beweist man, wobei nur die Gebiete $\mathfrak{b}$ und $|Z| < \varrho$ ihre Rollen vertauschen:

Ein Punkt A der Kreislinie $|Z| = \varrho$ kann nicht zwei verschiedenen Randelementen von $\mathfrak{b}$ entsprechen; und endlich ganz allgemein:

Bei der konformen Abbildung zweier Gebiete aufeinander entsprechen die Randelemente einander umkehrbar eindeutig.

Zusätzliche Schlussbemerkungen.

Zum Schlusse seien noch zwei andere Beweiswege zum Hauptsatze von S. 91 andeutungsweise beschrieben:

Beim ersten mache ich wieder die Voraussetzung, das abzubildende endliche Gebiet $\mathfrak{g}$ sei von einer einfachen Jordan-Kurve begrenzt. Ich bilde zuerst irgend ein größeres ($\mathfrak{g}$ als Teilgebiet enthaltendes) Gebiet $\mathfrak{b}_1$ auf ein Kreisgebiet $|Z| < \varrho_1$ ab, sodann, wie S. 95/96 beschrieben wurde, ein Gebiet $\mathfrak{b}_2$, das

größer als $\mathfrak{g}$, aber kleiner als $\mathfrak{d}_1$ ist, auf ein Kreisgebiet $|Z| < \varrho_2$, ferner $\mathfrak{d}_3 > \mathfrak{g}$, aber $< \mathfrak{d}_2$ auf $|Z| < \varrho_3$ usw., endlich $\mathfrak{d}_\omega$ durch Grenzübergang auf $|Z| < \varrho_\omega$, dann $\mathfrak{d}_{\omega+1}$ usw. Nach einer abzählbaren Menge von Schritten muß das Verfahren zum Ziele, d. h. zur Abbildung von $\mathfrak{g}$ auf ein Kreisgebiet führen.

Bei dem zweiten Wege soll das Ziel sein: das Äußere einer (nach außen hin) nirgends hohlen Kurve C der z-Ebene auf das Äußere eines Kreises der Z-Ebene durch eine Reihe

$$z = Z + a_0 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + \cdots \tag{29}$$

abzubilden. Man konstruiere, was nur die Lösung einer gewöhnlichen Minimumsaufgabe voraussetzt, das Polynom

$$P_n(z) = z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \cdots + b_n, \tag{30}$$

dessen Betrag auf C einen möglichst kleinen Maximalwert besitzt. Wird dann, außerhalb C, $\sqrt[n]{P_n(z)}$ durch die Bedingung $\lim\limits_{z \to \infty} \left(\sqrt[n]{P_n(z)} : z\right) = 1$ eindeutig definiert, so existiert für alle z außerhalb C der Grenzwert

$$f(z) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{P_n(z)}. \tag{31}$$

Löst man die Gleichung $Z = f(z)$ nach z auf, so hat man die gesuchte Funktion (29).

Dies alles bleibt giltig, auch wenn die Kurve C der Bedingung, nach außen nirgends hohl zu sein, nicht genügt; doch kann ich die Richtigkeit dieser Behauptung nur auf Grund des anderweitig bewiesenen Hauptsatzes dartun. Es liegt also hier ein ganz ähnlicher Fall vor, wie bei dem bekannten Neumannschen Verfahren.

Zur Trigonometrie im nicht-euklidischen Raume.

Von **F. Lindemann.**

Vorgetragen in der Sitzung am 4. März 1922.

1. Die trigonometrischen Formeln der nicht-euklidischen Geometrie (und damit auch diejenigen der sphärischen Trigonometrie) beruhen auf zwei algebraischen Identitäten. Ist

$$\Omega_{xx} = 0 \quad \text{oder} \quad a_x^2 \equiv b_x^2 \equiv c_x^2 \equiv \cdots = 0$$

die Gleichung des Fundamentalkegelschnittes in Punktkoordinaten, so ist

$$\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy} = 0$$

die Bedingung dafür, daß die Linie x-y Tangente an $\Omega_{xx} = 0$ sei, die linke Seite also mit $(a\,b\,u)^2$ wesentlich identisch. In der Tat sei $u_i = (x\,y)_i$, so wird

$$(1)\qquad \begin{aligned}(a\,b\,u)^2 &= (a_x b_y - b_x a_y)^2 = 2\,a_x^2 b_y^2 - 2\,a_x a_y b_x b_y \\ &= 2\,(\Omega_{xx}\,\Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2)\,.\end{aligned}$$

Geht man umgekehrt von der Gleichung in Linienkoordinaten aus und setzt

$$\Psi_{uu} = u_\alpha^2 = u_\beta^2 = (a\,b\,u)^2,$$

so ist, wenn $x_i = (u\,v)$ die Koordinaten des Schnittpunktes von u und v sind:

$$(2)\qquad 2\,(\Psi_{uu}\,\Psi_{vv} - \Psi_{uv}^2) = (u_\alpha v_\beta - v_\alpha u_\beta)^2 = (\alpha\,\beta\,x)^2$$
$$= 2\,a_\beta^2 b_x^2 - 2\,a_\beta b_\beta a_x b_x = 2\,A \cdot b_x^2 - 2\,(a\,c\,d)\,(b\,c\,d)\,a_x b_x = \tfrac{4}{3}\,A \cdot a_x^2\,{}^{1)},$$

[1]) Vgl. Identität (3) auf S. 286 in Bd. I von Clebsch, Vorlesungen über Geometrie, 1. Aufl.

wenn $A = (abc)^2$ die Invariante der Kurve bezeichnet. Ist nun u die Verbindungslinie der Punkte x und y, v diejenige der Punkte x und z, also: $u_i = (xy)_i$, $v_i = (xz)_i$, so wird

$$(3)\quad \begin{aligned} 2(\Psi_{uu}\Psi_{vv} - \Psi_{uv}^2) &= [(\alpha xy)(\beta xz) - (\alpha xz)(\beta xz)]^2 \\ &= (xyz)^2(\alpha\beta x)^2 = \tfrac{4}{3}A\cdot(xyz)^2\cdot a_x^2. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit x, y, z die Ecken eines Dreiecks, mit u, v, w die gegenüber liegenden Seiten, mit φ_x, φ_y, φ_z die Winkel, mit r_x, r_y, r_z die entsprechenden Seiten, so ist bekanntlich:

$$\cos\frac{r_x}{k} = \frac{\Omega_{yz}}{\sqrt{\Omega_{yy}\Omega_{zz}}},\ \cos\frac{r_y}{k} = \frac{\Omega_{zx}}{\sqrt{\Omega_{zz}\Omega_{xx}}},\ \cos\frac{r_z}{k} = \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}},$$

$$\cos\frac{\varphi_x}{k'} = \frac{\Psi_{vw}}{\sqrt{\Psi_{vv}\Psi_{ww}}},\ \cos\frac{\varphi_y}{k'} = \frac{\Psi_{wu}}{\sqrt{\Psi_{ww}\Psi_{uu}}},\ \cos\frac{\varphi_z}{k'} = \frac{\Psi_{uv}}{\sqrt{\Psi_{uu}\Psi_{vv}}},$$

also:

$$\sin\frac{r_x}{k} = \frac{\sqrt{\Omega_{yy}\Omega_{zz} - \Omega_{yz}^2}}{\sqrt{\Omega_{yy}\Omega_{zz}}} = \frac{\sqrt{\Psi_{uu}}}{\sqrt{2\,\Omega_{yy}\Omega_{zz}}},$$

$$\sin\frac{\varphi_x}{k'} = \frac{\sqrt{\Psi_{vv}\Psi_{ww} - \Psi_{vw}^2}}{\sqrt{\Psi_{vv}\Psi_{ww}}} = \frac{(xyz)\sqrt{2A\cdot\Omega_{xx}}}{\sqrt{3\,\Psi_{vv}\Psi_{ww}}}$$

und folglich:

$$\frac{\sin\frac{r_x}{k}}{\sin\frac{\varphi_x}{k'}} = \frac{\sqrt{3\,\Psi_{uu}\Psi_{vv}\Psi_{ww}}}{\sqrt{2A\,\Omega_{xx}\Omega_{yy}\Omega_{zz}}} = \frac{\sin\frac{r_y}{k}}{\sin\frac{\varphi_y}{k'}} = \frac{\sin\frac{r_z}{k}}{\sin\frac{\varphi_z}{k'}},$$

womit der Sinus-Satz gewonnen ist. Für den Cosinus-Satz benutzen wir die weitere Identität:

$$\begin{aligned} \Psi_{uv} = u_\alpha v_\alpha = (abu)(abv) &= (a_x b_y - b_x a_y)(a_x b_z - b_x a_z) \\ &= 2(\Omega_{xx}\Omega_{yz} - \Omega_{xy}\Omega_{xz}), \end{aligned}$$

$$\cos\frac{r_y}{k}\cdot\cos\frac{r_z}{k} + \cos\frac{\varphi_x}{k}\cdot\sin\frac{r_y}{k}\cdot\sin\frac{r_z}{k} = \frac{\Omega_{zx}\Omega_{xy}}{\Omega_{xx}\sqrt{\Omega_{yy}\Omega_{zz}}}$$

$$+ \frac{\Psi_{vw}}{\sqrt{\Psi_{vv}\Psi_{ww}}}\cdot\frac{\sqrt{\Omega_{vv}\Omega_{ww}}}{2\,\Omega_{xx}\sqrt{\Omega_{yy}\Omega_{zz}}} = \frac{\Omega_{xx}\Omega_{yz}}{\Omega_{xx}\sqrt{\Omega_{yy}\Omega_{zz}}} = \cos\frac{r_x}{k},$$

und entsprechend für den andern Winkel. Auf demselben Wege erhält man die sphärische Trigonometrie der euklidischen Kugel, indem man die Punkte der Ebene durch das Strahlenbündel der Kugeldurchmesser, den Kegelschnitt $\Omega_{xx} = 0$ durch den Asymptotenkegel der Kugel nach dem Prinzipe der Dualität ersetzt.

2. Die Trigonometrie auf einer nicht-euklidischen Kugel ergibt sich in folgender Weise. Ist $\Omega_{xx} = 0$ jetzt die Fundamentalfläche des Raumes und y der Mittelpunkt der Kugel mit Radius r, so ist die Gleichung derselben:

$$\Omega_{xx}\,\Omega_{yy}\cdot \operatorname{cosin}^2\frac{r}{k} - \Omega_{xy}^2 = 0. \tag{4}$$

Zwei in der Diametralebene u liegende Gerade, die außerdem bzw. in der Ebene v und v' liegen, bilden einen Winkel φ, bestimmt durch

$$\operatorname{cosin}\frac{\varphi}{k'} = \frac{(a\,b\,u\,v)(a\,b\,u\,v')}{\sqrt{(a\,b\,u\,v)^2\cdot(a\,b\,u\,v')^2}}, \tag{5}$$

wenn $\Omega = a_x^2 = b_x^2 \cdots$. Wird die Kugel von den Linien bzw. in den Punkten z und t geschnitten und bezeichnet τ einen beliebigen Punkt der Schnittlinie von v und v', so kann man setzen:

$$u_i = (y\,z\,t)_i, \qquad v_i = (y\,z\,\tau)_i, \qquad v_i = (y\,t\,\tau)_i,$$

und dann wird, da $u_y = 0$, $u_z = 0$:

$$(a\,b\,u\,v) = \begin{vmatrix} a_y & a_z & a_\tau \\ b_y & b_z & b_\tau \\ u_y & u_z & u_\tau \end{vmatrix} = u_\tau\cdot(a_y b_z - b_y a_z) = (y\,z\,t\,\tau)\,(a_y b_z - b_y a_z),$$

also:

$$\begin{aligned}
(a\,b\,u\,v)\,(a\,b\,u\,v') &= (y\,z\,t\,\tau)\cdot 2\,(\Omega_{yy}\,\Omega_{zt} - \Omega_{yz}\,\Omega_{yt}),\\
(a\,b\,u\,v)^2 &= 2\,(y\,z\,t\,\tau)^2\,(\Omega_{yy}\,\Omega_{zz} - \Omega_{yz}^2),\\
(a\,b\,u\,v')^2 &= 2\,(y\,z\,t\,\tau)^2\,(\Omega_{yy}\,\Omega_{tt} - \Omega_{yt}^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{cosin}\frac{\varphi}{k'} &= \frac{\Omega_{yy}\,\Omega_{zt} - \Omega_{yz}\,\Omega_{yt}}{\sqrt{(\Omega_{yy}\,\Omega_{zz} - \Omega_{yz}^2)\,(\Omega_{yy}\,\Omega_{tt} - \Omega_{yt}^2)}}\\
&= \left(\operatorname{cotang}\frac{r}{k}\right)^2 \frac{\Omega_{yy}\,\Omega_{zt} - \Omega_{yz}\,\Omega_{yt}}{\Omega_{yz}\,\Omega_{yt}} = \frac{\mathfrak{W}_{zt}}{\sqrt{\mathfrak{W}_{zz}\cdot\mathfrak{W}_{tt}}},
\end{aligned} \tag{6}$$

wenn $\mathfrak{W}_{xx} = \Omega_{yy}\,\Omega_{xx} - \Omega_{xy}^2$ die linke Seite der Gleichung des Asymptotenkegels bezeichnet. Der Winkel ψ zweier Diametralebenen v, w ist bestimmt durch

$$\text{(7)} \qquad \operatorname{cosin}\frac{\psi}{k'} = \frac{\Psi_{vw}}{\sqrt{\Psi_{vv}\,\Psi_{ww}}} = \frac{(a\,b\,c\,v)\,(a\,b\,c\,w)}{\sqrt{(a\,b\,c\,v)^2\cdot(d\,e\,f\,w)^2}}.$$

Andererseits berühren die beiden zur Bestimmung des den Winkel definierenden Doppelverhältnisses dienenden Ebenen, die durch den Schnitt von v und w gehen, auch den Kegel $\mathfrak{W}_{xx} = 0$ und den Kegelschnitt, in dem dieser Kegel die Fläche $\Omega_{xx} = 0$ berührt. Die Gleichung des letzteren in Ebenenkoordinaten u ist

$$P_{uu} \equiv 2\,(u_\alpha^2\,v_\beta^2 - u_\alpha\,u_\beta\,v_\alpha\,v_\beta) \equiv (u_\alpha\,v_\beta - u_\beta\,v_\alpha)^2 = 0,$$

wenn $v_i = c_i\,c_y = d_i\,d_y$ gesetzt wird; es ist:

$$\begin{aligned}(u_\alpha\,v_\beta - u_\beta\,v_\alpha)^2 &= (u_\alpha\,c_\beta - u_\beta\,c_\alpha)\,(u_\alpha\,d_\beta - u_\beta\,d_\alpha)\,c_y\,d_y \\ &= 2\,(u_\alpha^2\cdot c_\beta\,d_\beta\,c_y\,d_y - u_\alpha\,u_\beta\,c_\alpha\,d_\beta\,c_y\,d_y).\end{aligned}$$

Hierin ist

$$\begin{aligned}c_\beta d_\beta c_y d_y &= \tfrac{1}{4}(c\,a\,b\,e)\,d_y[(d\,a\,b\,e)c_y - (d\,a\,b\,c)e_y - (d\,a\,c\,e)b_y - (d\,c\,b\,e)a_y] \\ &= \tfrac{1}{4}(c\,a\,b\,e)^2\,d_y^2 = \tfrac{1}{4}\,A\cdot\Omega_{yy},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_\beta u_\alpha\,c_\alpha\,d_\beta\,c_y\,d_y &= (a\,b\,c\,u)\,(f\,g\,h\,u)\,(a\,b\,e\,c)\,(f\,g\,h\,d)\,c_y\,d_y \\ &= \tfrac{1}{4}\,(a\,b\,e\,u)\,(a\,b\,e\,c)\,c_y\,(f\,g\,h\,d)^2\,u_y \\ &= \tfrac{1}{16}\,(a\,b\,e\,c)^2\,(f\,g\,h\,d)^2\,u_y^2 = \tfrac{1}{16}\,A^2\cdot u_y^2,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}P_{uu} &= \tfrac{1}{2}\,A\cdot\Omega_{yy}\cdot(a\,b\,c\,u)^2 - \tfrac{1}{8}\,A^2\,u_y^2, \\ P_{uv} &= \tfrac{1}{2}\,A\cdot\Omega_{yy}\cdot(a\,b\,c\,u)\,(a\,b\,c\,v) - \tfrac{1}{8}\,A^2\,u_y\,v_y.\end{aligned}$$

Da nun $v_y = 0$ und $w_y = 0$ ist, so folgt:

$$\operatorname{cosin}\frac{\psi}{k'} = \frac{P_{vw}}{\sqrt{P_{vv}\,P_{ww}}} = \frac{(a\,b\,c\,v)\,(a\,b\,c\,w)}{\sqrt{(a\,b\,c\,v)^2\cdot(a\,b\,c\,w)^2}},$$

wie in (7), wodurch das geometrisch evidente Resultat auch rechnerisch bestätigt wird. Zwischen den Kanten- und Flächenwinkeln einer dreiseitigen Ecke gelten also in der nicht-euklidischen Geometrie dieselben Formeln wie zwischen den Seiten und Winkeln des ebenen Dreiecks (oder des euklidischen sphärischen Dreiecks).

3. Um den Winkel φ durch einen Bogen auf der nicht-euklidischen Kugel zu ersetzen, müssen wir allgemein den Bogen einer Kurve durch den zugehörigen Zentriwinkel ausdrücken. Das Quadrat des Bogenelementes ist allgemein

$$\frac{ds^2}{k^2} = \frac{\Omega_{xx}\,\Omega_{dx\,dx} - \Omega^2_{x\,dx}}{\Omega^2_{xx}} \tag{8}$$

und das Quadrat des unendlich kleinen Winkels der Linien u und $u + du$

$$\frac{d\varphi^2}{k'^2} = \frac{\Psi_{uu}\,\Psi_{du\,du} - \Psi^2_{u\,du}}{\Psi^2_{uu}}, \tag{9}$$

wo $\Omega = 0$ und $\Psi = 0$ die Gleichungen des Fundamentalkegelschnittes in Punkt- bzw. Linienkoordinaten seien. Die Gleichung des Kreises mit dem Zentrum y und dem Radius r ist:

$$R \cdot \Omega_{xx}\,\Omega_{yy} - \Omega^2_{xy} = 0, \quad \text{wo } R = \cosin^2 \frac{r}{k}, \tag{10}$$

und die Differentiale genügen der Bedingung:

$$R \cdot \Omega_{x\,dx}\,\Omega_{yy} - \Omega_{xy}\,\Omega_{y\,dx} = 0 \tag{11}$$

Nach (1), (10) und (11) haben wir, wenn zur Abkürzung $dx_i = z_i$, $du_i = w_i$ gesetzt wird:

$$\Psi_{uu} = 2\,(\Omega_{xx}\,\Omega_{yy} - \Omega^2_{xy}) = 2\,(1 - R)\,\Omega_{xx}\,\Omega_{yy},$$

$$\Psi_{ww} = 2\,(\Omega_{yy}\,\Omega_{zz} - \Omega^2_{yz}) = \frac{2\,\Omega_{yy}}{\Omega_{xx}}(\Omega_{xx}\,\Omega_{zz} - R\,\Omega^2_{xz}),$$

$$\Psi_{uw} = 2\,(\Omega_{xz}\,\Omega_{yy} - \Omega_{xy}\,\Omega_{yz}) = 2\,(1 - R)\,\Omega_{yy}\,\Omega_{xz},$$

folglich:

$$\frac{d\varphi^2}{k'^2} = \frac{\Omega_{xx}\,\Omega_{zz} - \Omega^2_{xz}}{\Omega^2_{xx}\,(1 - R)} = \frac{ds^2}{k^2}\,\frac{1}{1 - R},$$

oder:

$$\frac{ds^2}{k^2} = \frac{d\varphi^2}{k'^2}\,(R - 1)^2 = \frac{d\varphi^2}{k'^2}\left(\sin \frac{r}{k}\right)^2,$$

womit die bekannte Formel zwischen Bogenelement eines Kreises und zugehörigem Zentriwinkel erhalten ist:

$$\frac{s}{k} = \sin \frac{r}{k} \cdot \frac{\varphi}{k'},$$

und der in (5) berechnete Winkel zwischen den Strahlen y-z und y-t kann durch einen Bogen auf der Kugel (4) ersetzt werden, so daß auf der nicht-euklidischen Kugel dieselben trigonometrischen Formeln gelten wie auf der euklidischen Kugel.

4. Die angewandte Methode ist besonders geeignet, die Sätze über die Höhenlothe und die Mittellinien eines Dreiecks abzuleiten; es ist das schon von Coolidge geschehen[1]), weshalb wir darauf nicht mehr eingehen.

[1]) The Elements of non-euclidean geometry, Oxford 1902.

Störungen und Kombinationsprinzip im System der violetten Cyanbanden.

Von A. Kratzer.

Vorgelegt von A. Sommerfeld in der Sitzung am 4. März 1922.

Bei dem Aufsuchen von Gesetzmäßigkeiten in den Bandenspektren bieten die sogenannten „Störungen" ein wichtiges Hilfsmittel. Mit diesem Namen bezeichnet man die Erscheinung, daß eine Linie nicht genau an der Stelle beobachtet wird, wo sie auf Grund der Interpolationsformel

$$\nu = A + 2mB + m^2 C + \cdots \tag{1}$$

zu erwarten wäre. Im Falle von Dublettlinien äußert sich dies meistens darin, daß die beiden Dublettkomponenten nach verschiedenen Seiten von der regelmäßigen Lage verschoben sind, so daß das Dublett abnorm weit oder eng erscheint. Nach Deslandres sollen nun innerhalb eines Bandensystems entsprechende Serien (wir nennen sie im folgenden Teilbanden) die gleichen Störungen an der gleichen Stelle, d. h. bei gleicher Laufzahl m zeigen[1]). Dieses Gesetz wurde von Heurlinger[2]) in seiner Dissertation geprüft und dahin ergänzt, daß hiebei die Numerierung innerhalb einer Teilbande so zu treffen ist, daß der schwächsten Linie die Laufzahl 0 zugeordnet wird. Tut man dieses, so zeigt sich, daß nicht nur die Störungen innerhalb verschiedener Teilbanden eines Systems, bei den violetten Cyanbanden z. B. der B-Banden von 4606, 4216, 3883 Å gleiche Laufzahl bekommen, daß vielmehr auch innerhalb einer

---

[1]) H. Deslandres, C. R. 139, 1176, 1904.

[2]) Dissertation, Lund 1918, S. 18.

Teilbande die Störungen symmetrisch zur Nullstelle liegen; und zwar liegen sie nach Heurlinger bei den Cyanbanden bei $+m$ und $-(m+1)$ z. B. in den B-Banden bei $+46$ und -47. Demnach scheint es, daß die Störungen mit der Laufzahl m enge verknüpft sind, und wir müssen uns fragen, ob sich die Regelmäßigkeit des Auftretens der Störungen theoretisch verstehen läßt.

§ 1. Die Störungen als Termstörungen. Auf Grund der Theorie von Heurlinger und Lenz[1]) kommt die Linie $+m$ dadurch zustande, daß der Rotationszustand der Molekel von der Quantenzahl $m+1$ auf m übergeht, während der Linie $-(m+1)$ der Quantensprung $m \longrightarrow (m+1)$ zugeordnet ist. Darnach hat es den Anschein, als ob die Störung den beiden zueinander scheinbar inversen Sprüngen $m \rightleftarrows (m+1)$ zuzuordnen wäre. Dieser Schluß wird aber hinfällig, wenn wir berücksichtigen, daß beim Emissionsvorgang auch die Elektronenkonfiguration sich ändert. Denken wir uns diese zum Zwecke der bequemeren Ausdrucksweise durch eine Quantenzahl p gegeben und die Schwingung der Atome[2]) innerhalb des Moleküls durch eine zweite Quantenzahl n festgelegt und mit $W(p, n, m)$ die durch h dividierte Energie der Molekel in dem durch die Quantenzahlen p, n und m charakterisierten Zustande bezeichnet, so haben wir die betrachteten Linien zu schreiben:

$$\nu_m = W(p_1, n_1, m+1) - W(p_2, n_2, m),$$
$$\nu_{-(m+1)} = W(p_1, n_1, m) - W(p_2, n_2, m+1).$$

Man sieht, daß trotz der scheinbaren Symmetrie die beiden Linien keinen Term gemeinsam haben und wir können deshalb die Störung nicht als Termstörung auffassen. Damit ist uns gleichzeitig jede Möglichkeit genommen, das wiederholte Auftreten der gleichen Störung innerhalb eines Bandensystems zu verstehen. Diese Erscheinung würde uns aber sofort selbstverständlich sein, wenn wir zu einer Auffassung der gestörten

[1]) W. Lenz, Verh. der Deutschen Phys. Ges. 21, 632, 1919.

[2]) T. Heurlinger, Zeitschr. f. Phys. 1, 1920, S. 81. A. Kratzer, Phys. Zeitschr. 22, 1921, S. 552, Ann. d. Phys. 67, 127, 1922.

Linien kommen könnten, bei der die Störung als Termstörung auftritt. Welcher Term, ob der Anfangs- oder Endterm dabei in Frage kommt, muß eine einfache Überlegung liefern, sobald wir das Auftreten der Störungen durch das ganze Bandensystem verfolgen.

Wir erwähnten bereits, daß die gleichen Störungen auftreten bei allen B-Banden der violetten Cyanbanden und können noch hinzufügen, daß dasselbe auch für die A-Banden und die C-Banden unter sich gilt[1]). Nach der vom Verfasser durchgeführten Termdarstellung auf Grund der erweiterten Heurlingerschen Theorie sind aber diese Teilbanden dadurch ausgezeichnet, daß sie gleichen Anfangszustand der Elektronenkonfiguration und Oscillation haben. Wir müssen also schließen, daß die Störung bei den betrachteten Cyanbanden mit dem Anfangszustand verknüpft ist, daß der Anfangsterm immer dann einen gestörten, von der gewöhnlichen Formel abweichenden Wert annimmt, wenn eine bestimmte Kombination der Quantenzahlen $p_1 n_1 m$ vorliegt.

§ 2. Folgerungen für die Heurlinger-Lenzsche Bandentheorie. Nach den vorausgehenden Überlegungen sehen wir uns genötigt, die Deutung der einzelnen Linien der Teilbande in dem Sinne abzuändern, daß den Linien $+m$, $-(m+1)$ der gleiche Anfangszustand zugeordnet wird. Dabei müssen wir uns von dem Gesichtspunkte leiten lassen, daß sich die Deslandressche Formel und ihre Termzerlegung durchaus bewährt hat, daß wir also hiervon soviel wie möglich beibehalten müssen. Dazu gehört insbesondere, daß sich die Formel als Differenz zweier in m quadratischen Terme ergibt. Hieraus folgen nämlich alle die Gesetzmäßigkeiten, die der Verfasser[2]) zwischen den Koeffizienten C der Deslandresschen Formel nachweisen konnte. Weniger Gewicht ist dabei dem Absolutwert der Laufzahl m beizulegen, dessen Bestimmung bisher ja immer hypothetisch war und der auch quantitativ weniger gute Zahlenübereinstimmung ergab.

---

[1]) Vgl. die Dissertation von Heurlinger, S. 18.

[2]) Phys. ZS. 22, 1921, S. 552, Tab. II uf.

Nun ist ohne weiteres klar, daß die Deslandressche Formel ihre Gestalt nicht ändert, wenn wir die Laufzahl m um einen beliebigen konstanten Betrag ε abändern. Setzen wir

$$m^* = m - \varepsilon,$$

so geht eine Formel

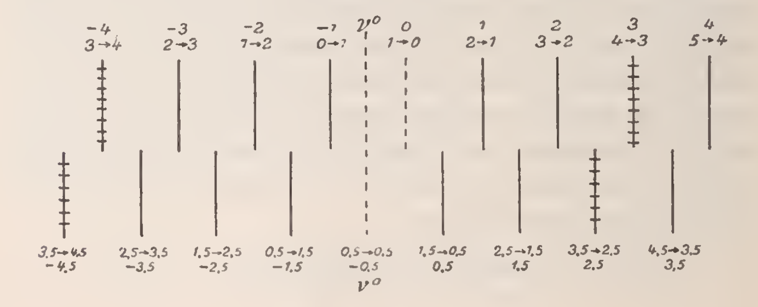
$$\nu = A^* + 2\,m^* B^* + m^{*2}\,C \tag{2}$$

aus (1) hervor, die mathematisch die gleiche Funktion wie (1) darstellt, also mit vollkommen gleicher Genauigkeit wie (1) die empirischen Daten wiedergibt. Wir wollen nun die Laufzahl m^* in (2), vorläufig ohne theoretische Begründung, als vollkommen analog zur Quantenzahl m in (1) betrachten. Nun legt in (1) und dementsprechend auch in (2) die Laufzahl m den Endzustand fest. Da wir verlangen müssen, daß den Störungen gleiche Anfangsquantenzahlen m^* zugeteilt werden, so müssen die entsprechenden Endquantenzahlen $m^* - 1$ und $m^* + 1$ heißen. Die Laufzahlen in der Formel (2) müssen sich also bei den gestörten Linien nicht, wie es sich nach Heurlinger ergibt, um 1, sondern um 2 unterscheiden und zwar muß die negative Laufzahl um 2 größer sein. Wir fordern also, daß nach der von uns gesuchten Abänderung für die Laufzahl der Störung gilt:

$$m_0^* = m_0 - \varepsilon, \quad -(m_0^* + 2) = -(m_0 + 1) - \varepsilon;$$

daraus kommt: $m_0^* = m_0 - \frac{1}{2}$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Wenn also in (2) die Laufzahl m^* alle halbzahligen Werte annimmt, dann haben wir erreicht, daß die Störungen als Termstörungen des Anfangstermes sich darstellen, wie wir es aus dem empirischen Befund fordern mußten.



Die neue Zuordnung der Linien zu den Laufzahlen ist aus der Figur zu ersehen. Im oberen Teil ist hier die Heurlingersche Bezeichnungsweise benutzt, der untere Teil gibt unsere Bezeichnungsweise wieder. Für $m = 3$, $-(m+1) = -4$ ist eine Störung angedeutet, sie erhält in der neu eingeführten Schreibweise die Anfangsquantenzahlen 3,5 und die Laufzahl 2,5 bzw. — 4,5. Wir können uns also an dem Beispiel nochmals überzeugen, daß den gestörten Linien gleiche Anfangszustände zugeordnet sind.

Die empirischen Verhältnisse führen nach dem Vorausgehenden fast zwingend zu dem Resultat, daß in die Heurlinger-Lenzsche Formel halbe Laufzahlen einzuführen sind und daß die Formel der Rotationsenergie für die Bandenspektren abzuändern ist.

§ 3. **Die theoretische Deutung der halben Laufzahlen.** Fragen wir uns, ob eine Erweiterung der Energieformel für die Rotationsenergie

$$W = \frac{m^2 h^2}{8 \pi^2 J} \tag{3}$$

theoretisch nahegelegt wird, so ist dabei folgendes zu beachten. Bei der Ableitung der Formel ist das Molekül als starrer Körper betrachtet und der Einfluß der Elektronenbewegung auf die Rotation der Molekel vollkommen vernachlässigt. Treibt man dagegen die Idealisierung des Problems nicht so weit und rechnet mit einem Molekülmodell, in dem die Elektronen beliebige Bewegungen ausführen, allerdings mit der einen, für den Fall der Cyanbanden begründeten Einschränkung, daß die Elektronen kein resultierendes Impulsmoment um die Kernverbindungslinie haben, so kommt als Rotationsanteil der Energie der Molekel:

$$W = \frac{(p_\varphi - p_\psi)^2}{2 J};$$

hier bedeutet p_φ das gesamte Impulsmoment des Moleküls, das wie sonst zu quanteln ist

$$p_\varphi = \frac{m h}{2 \pi}.$$

Der zugehörige Winkel φ ist dabei das Azimut der Kernverbindungslinie gegen eine raumfeste Gerade in der Rotationsebene; p_ψ ist das resultierende Impulsmoment der sämtlichen Elektronen. Bei der Quantelung ist über p_ψ in erster Näherung zu mitteln und wir erhalten

$$W = \frac{m^2 h^2}{8 \pi^2 J} - \frac{m h}{4 \pi J} \overline{p_\psi} + \frac{\overline{p_\psi^2}}{2 J} = \frac{m^2 h^2}{8 \pi^2 J} - \frac{2 m \varepsilon h^2}{8 \pi^2 J} + \varDelta, \quad (3\,a)$$

wobei wir $\overline{p_\psi} = \frac{\varepsilon h}{2 \pi}$ und $\frac{\overline{p_4^2}}{2 J} = \varDelta$ gesetzt haben.

Die Größe $\varDelta$ nehmen wir zu der ohnehin unbekannten Elektronenenergie hinzu und haben als Ergebnis eine Formel gewonnen, die sich von der früheren dadurch unterscheidet, daß zur Quantenzahl m^2 die Größe $-2 \varepsilon m$ hinzugekommen ist. Da p_ψ im allgemeinen nicht zyklisch ist, wird es auch nicht konstant und in einfacher Weise gequantelt sein, so daß wir über die Größe von ε von vorneherein keine Aussage machen können. Jedenfalls brauchen wir von dem durch eine Mittelung gewonnenen Werte nicht zu verlangen, daß er ganzzahlig ist.

Weiter ist zu beachten, daß der resultierende Elektronenimpuls nicht notwendig die gleiche Richtung wie der Gesamtimpuls haben muß. Es ist zu erwarten, daß im allgemeinen auch die entgegengesetzte Richtung vorkommt, daß wir also

$$W = \frac{h^2}{8 \pi^2 J} (m^2 \mp 2 m \varepsilon) \quad (3\,b)$$

zu setzen haben. Wir sind so zu einem doppelten Term gelangt und werden nun 2 solche Dublett-Terme als zusammengehörig bezeichnen, die möglichst enge beieinander liegen, bei denen also

$$(m' + \varepsilon) - (m - \varepsilon) | < \tfrac{1}{2}$$

ist. In diesem Falle haben die beiden Frequenzen der Rotation die bei gegebenem ε kleinstmöglichen Differenzen, nämlich kleiner als der halbe Abstand der aufeinander folgenden gequantelten Rotationsfrequenzen.

Für den Sprung des Gesamtimpulses p_φ verlangen wir nun auf Grund des Auswahlprinzips wie immer, daß er nur die

Werte ± 1 annehmen kann. Der Elektronenimpuls geht dabei von ε_1 auf ε_2 über und zwar wird er dabei seinen Richtungssinn beibehalten, wie man nach dem Korrespondenzprinzip einsehen kann.

Wir erhalten so nach (3 b) aus den Übergängen

$$(m+1, \varepsilon_1) \longrightarrow (m, \varepsilon_2), \quad (m'+1, -\varepsilon_1) \longrightarrow (m', -\varepsilon_2),$$
$$(m'-1, -\varepsilon_1) \longrightarrow (m', -\varepsilon_2), \quad (m-1, \varepsilon_1) \longrightarrow (m, \varepsilon_2)$$

die Frequenzen:

$$\nu_1^+ = m^2 C + 2m\left(\frac{1-\varepsilon_1}{J_1} + \frac{\varepsilon_2}{J_2}\right)\frac{h}{8\pi^2} + \frac{h}{8\pi^2 J_1},$$

$$\nu_2^+ = m'^2 C + 2m'\left(\frac{1+\varepsilon_1}{J_1} - \frac{\varepsilon_2}{J_2}\right)\frac{h}{8\pi^2} + \frac{h}{8\pi^2 J_1},$$

$$\nu_1^- = m'^2 C - 2m'\left(\frac{1-\varepsilon_1}{J_1} + \frac{\varepsilon_2}{J_2}\right)\frac{h}{8\pi^2} + \frac{h}{8\pi^2 J_1},$$

$$\nu_2^- = m^2 C - 2m\left(\frac{1+\varepsilon_1}{J_1} - \frac{\varepsilon_2}{J_2}\right)\frac{h}{8\pi^2} + \frac{h}{8\pi^2 J_1},$$

Unsere theoretische Überlegung führt also auf 2 Teilbanden mit positivem und negativem Zweig, die gleiche Werte von C, aber verschiedene Werte von B nach Formel (1) haben. Bemerkenswert ist, daß die Zweige mit gleichem Elektronenimpulsmoment $(+\varepsilon)$ z. B. ν_1^+ und ν_2^- sich nicht fortsetzen. Derartige Teilbanden lassen sich z. B. bei Zn und Hg nachweisen, doch wollen wir hierauf an dieser Stelle nicht eingehen.

Um unser Problem für die Frage der Cyanbanden zu spezialisieren, betrachten wir den besonderen Fall, daß die beiden Teilbanden ein enges Dublett bilden. Nach den vorausgehenden Überlegungen heißt dies, daß

$$|(m'+\varepsilon) - (m-\varepsilon)|$$

sehr klein ist. Dieser Bedingung muß sowohl ε_1 wie ε_2 genügen, d. h. es muß $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ ebenfalls klein sein. Die einfachsten Fälle, in denen unsere Bedingung erfüllt ist, sind

$$m = m', \ \varepsilon \text{ klein.}$$

Bilden wir mit diesen Werten nun $\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$, d. h. nehmen wir jeweils die Dublettmitte, so kommt:

$$\nu = A + 2m \frac{h}{8\pi^2 J_1} + m^2 C,$$

also genau die Heurlingersche Formel, mit der wir die Lage der Störungen nicht verstehen konnten.

Die nächste Möglichkeit ist:

$$m = m' + 1, \quad \varepsilon = \tfrac{1}{2} + \delta.$$

Nun kommt für die Dublettmitte:

$$\begin{aligned} \nu &= (m^2 - m + \tfrac{1}{2}) C + 2(m - \tfrac{1}{2}) \frac{h}{8\pi^2 J_1} + A \\ &= (m - \tfrac{1}{2})^2 C + 2(m - \tfrac{1}{2}) \frac{h}{8\pi^2 J_1} + A^* \\ &= m^{*2} C + 2m^* B^* + A^*. \end{aligned}$$

Wir bekommen also wieder die Deslandressche Formel mit derselben theoretischen Bedeutung der Konstanten, wie sie die Heurlingersche Theorie ergibt. Zugleich haben wir aber genau unsere Formel (2) erhalten, die wir empirisch aus der Verteilung der Störungen abgeleitet hatten. Wir sehen nun, daß die Schwierigkeit, die sich früher aus der halben Laufzahl ergab, verschwindet: daß das gemittelte Elektronenimpulsmoment nicht ganzzahlig ist, war von vorneherein zu erwarten.

Eine weitere Bemerkung knüpft sich an die sogenannte Null-Linie $m = 0$. Wenn sowohl die Linie ν^0, die einer rotationslosen Molekel entspricht, wie auch die Linie $m = 0$ nach dem empirischen Befunde ausfiel, so mußte man annehmen, daß der rotationslose Zustand statistisch auszuschließen ist, was mit den Erfahrungen aus der Theorie der spezifischen Wärme in Einklang war. Da nun aber $m = 0$ als Anfangszustand bei der Linie $m = -1$ ebenfalls ins Spiel trat, so ergab sich eine gewisse Schwierigkeit, das Nichtausfallen dieser Linie zu deuten[1]). Nach unserer jetzigen Deutung fällt die Linie ν^0, wie man aus

[1]) A. Kratzer, Zeitschr. f. Phys. 3, 1921.

der Figur abliest, mit der Linie $-\frac{1}{2}$ zusammen. Da diese als Dublettlinie sowohl dem Übergange $0 \longrightarrow 1$, wie auch dem Übergange $1 \longrightarrow 0$ der Gesamtquantenzahl m entspricht, ist nur sie durch das Verbot $m = 0$ ausgeschlossen. Allerdings würden bei den Linien $+0{,}5$ und $-1{,}5$ noch je eine Komponente ausfallen. Da die Dubletts an dieser Stelle aber nicht auflösbar sind, so ist diese Aussage der Theorie im vorliegenden Falle nicht prüfbar. Auch aus der Intensität läßt sich, da diese an der Nullstelle unter allen Umständen schwach sein soll, kein Schluß ziehen. Wir brauchen also zum Verbot des rotationslosen Zustandes außer dem Auswahlprinzip keine neue Hilfsannahme zu machen, um das Ausfallen der Linie $m = 0$ und nur dieser Linie zu verstehen[1]). Außer diesem qualitativen Argument zu Gunsten unserer Deutung bieten sich aber eine Reihe zahlenmäßiger Belege, auf die wir jetzt eingehen werden.

§ 4. Die Kombinationsbeziehungen im System der violetten Cyanbanden. Wir erwähnten bereits, daß auf Grund unserer Formel (2) den Koeffizienten B^*, C^* dieselbe Bedeutung zukommt, die nach Heurlinger und Lenz die Konstanten B und C haben sollen. Da sich C^* von C nicht unterscheidet, konnten wir die theoretischen Gesetzmäßigkeiten zwischen den verschiedenen Werten von C^* auch an den empirischen C-Werten bestätigt finden. Anders bei B; hier kommt es ganz wesentlich auf die richtige Numerierung an, und da wir diese nicht hatten, so ergaben sich als natürliche Folge Unstimmigkeiten. Wir wiesen bereits darauf hin[2]), daß die B-Werte bei allen Teilbanden des Systems mit gleicher Anfangsquantenzahl der Oscillation strenge gleich sein mußten und fanden dieses Gesetz an den empirischen Werten von Heurlinger nur angenähert bestätigt. Auch eine mit Benutzung von theoretisch begründeten Korrekturgliedern ausgeführte Rechnung ergab keine Verbesserung, so daß sich schließlich keine

[1]) Im Falle eines Impulsmomentes um die Kernverbindungslinie haben hier andere Überlegungen Geltung.

[2]) A. Kratzer, Ann. d. Phys. 67, 145, 1922; Münchener Habilitationsschrift; Phys. Zeitschr. l. c.

andere Erklärung ergab, als die einer falschen Numerierung. Wir haben nun auf Grund unserer abgeänderten Deutung der Linien die Konstanten neu berechnet und zwar aus der Formel:

$$\nu = A + m^{*2}(B_1^{n_1} - B_2^{n_2}) \pm 2\, m^* B_1^{n_1} + (m^* \pm 1)^4 u_1^2 B_1^0 - m^{*4} u_2^2 B_2^0,$$

wo

$$(4) \qquad B_1^{n_1} = \frac{h}{8\pi^2 J_1} - n_1 a_1, \quad B_2^{n_2} = \frac{h}{8\pi^2 J_2} - n_2 a_2$$

und $u = \frac{2B}{\nu^0}$, ν^0 = Kernschwingungsfrequenz war. Die Berechnung wurde durchgeführt für die Banden 3883 und 4216, für die allein die Wellenlängen der einzelnen Linien veröffentlicht sind und auch hier vorläufig nur für die A- und B-Bande, wo die Linien durch Überlagerung nur selten verschoben sind. Das Ergebnis der Rechnung, in dem die dritte Stelle hinter dem Koma als unsicher bezeichnet werden muß, ist in der Tabelle gegeben:

Berechnet aus	$2\,B_1^0$	$2\,B_1^1$	$2\,B_2^0$	$2\,B_2^1$	$2\,B_2^2$
$\lambda = 3883\ A^0$	3,9190	3,8744	3,7832	3,7467	
$\lambda = 4216\ A^0$	3,9174	3,8731		3,7460	3,7105

Man sieht daraus, daß nun die Übereinstimmung der untereinander stehenden Werte innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der empirischen Daten vollkommen ist, während die Heurlingersche Numerierung Differenzen um mehrere Einheiten der zweiten Stelle ergab. Weiter können wir zwischen diesen Zahlen und den früheren Ergebnissen[1]) folgende Vergleiche anstellen: Wir forderten in (4), daß die B-Werte linear mit der Schwingungsquantenzahl abfallen und berechneten aus den C-Werten die Beträge

$$2\,B_1^{n_1} = 2\,B_1^0 - 0{,}0443\, n_1, \quad 2\,B_2^{n_2} = 2\,B_2^0 - 0{,}0346\, n_2.$$

Aus unseren Zahlen ergeben sich für die Konstanten a in (4):

a_1 = 0,0446 aus den Werten für 3883
= 0,0443 „ „ „ „ 4216
= 0,0445 „ „ gemittelten Werten.

1) A. Kratzer, Phys. Zeitschr. 22, 1921, S. 552.

$a_2 = 0{,}0365$ aus den Werten für 3883
$= 0{,}0355$ „ „ „ „ 4216
$\left.\begin{array}{l} = 0{,}0368 \\ = 0{,}0359 \end{array}\right\}$ „ „ gemittelten Werten.

Wir erhalten also für a_1 vollkommene, für a_2 befriedigende Übereinstimmung aus den beiden Berechnungsmethoden. Ferner können wir noch den Betrag von $2\,B^0 - 2\,B_2^0$ berechnen. Dieser ergab sich

aus den C-Werten zu $0{,}1351$ cm^{-1}
und wird aus 3883: $0{,}1358$ cm^{-1}
aus 3883 und 4216 gemittelt: $0{,}1350$ cm^{-1}.

Auch hier zeigt sich vollkommene Übereinstimmung. Wir dürfen demnach die hier abgeleiteten Werte für B als die richtigen auffassen, da sie und nur sie die vom Kombinationsprinzip geforderte Identität der Terme gewährleisten. Da andererseits der Wert von B eng mit der Numerierung verknüpft ist, fassen wir die gefundene Zahlenübereinstimmung als Bestätigung für die vorgeschlagene Deutung der Linien auf.

§ 5. Belege für das Vorkommen unganzzahliger Laufzahlen. Das Auftreten nicht ganzzahliger Laufzahlen, also gewissermaßen unganzer Quantenzahlen in unserer Formel, die wir ja aus rein empirischen Daten ableiteten, ist, obwohl wir eine theoretische Deutung gegeben haben, merkwürdig genug, um noch weitere Beispiele wünschenswert erscheinen zu lassen. Wir wollen hier nur auf einige hinweisen. Heurlinger zeigt in seiner Dissertation, daß sich die Kohlenbanden 6188, 5635, 5165, 6120, 5585, 5129, 4737 A^0 je in 6 Teilbanden zerlegen lassen, die selber wieder in je 2 Teilbanden aufzulösen sind, die zueinander so liegen, daß die eine fast genau in die Mitte zwischen 2 Linien der anderen Teilbande fällt. Wenn wir beide Teilbanden dem gleichen Elektronenvorgang zuordnen wollen, so ist dies nur so möglich, daß wir beide Linienfolgen durch eine Formel der Art (2) darstellen, in der sich die m um einen Betrag von ungefähr 0,5 unterscheiden. Ein ganz ähnlicher Fall liegt bei der zweiten positiven Stickstoffgruppe vor.

Man kann gegen diese Beispiele einwenden, daß sie wegen der komplizierten Struktur der Bande nicht überzeugend genug sind. Wir möchten deshalb noch einen einfacheren Fall erwähnen. Nach einer freundlichen brieflichen Mitteilung von Herrn W. E. Curtis zerfallen die Heliumbanden 6400, 5770, 4546 A^0 von einem Nullzweig abgesehen in 2 Teilbanden mit je einem positiven und negativen Zweig. Beide Banden unterscheiden sich wesentlich durch ihre Intensität, und zwar ist im positiven Zweig die eine Bande, im negativen Zweig die andere Bande stärker. Die gegenseitige Lage der beiden Teilbanden ist nun wenigstens in der Nähe der Bandenmitte wieder so, daß die eine in die Lücken der andern fällt; es sind gleichsam beide Linienfolgen unserer Figur vorhanden. Die Besprechung der besonders klaren Verhältnisse bei Zink und Quecksilber soll einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben. Zusammenfassend können wir nochmals sagen: Die empirischen Serienformeln für die Teilbanden lassen die Einführung von nicht ganzen Laufzahlen als zweckmäßig erscheinen, die modellmäßige theoretische Deutung kommt zu dem gleichen Ergebnis.

Zusammenfassung.

1. Es wird gezeigt, daß man aus der Verteilung der Störungen in den Cyanbanden darauf schließen muß, daß es sich um Termstörungen des Anfangsterms handelt.
2. Die Deutung der Bandenlinien von Heurlinger ist mit der Feststellung 1) nicht verträglich.
3. Es wird auf Grund theoretischer Überlegungen eine abgeänderte Deutung der Heurlingerschen Formel mit halbzahligen Laufzahlen vorgeschlagen, die mit der Forderung 1) in Einklang ist.
4. Aus der theoretischen Bedeutung der Koeffizienten der Deslandresschen Formel wird mittels der Kombinationsbeziehungen in den Cyanbanden die abgeänderte Formel bestätigt.
5. Es werden weitere Belege für die Notwendigkeit der Verwendung nicht ganzer Laufzahlen aufgeführt.

Eine Methode zur Unterscheidung der sogenannten Bogenlinien von den Funkenlinien der Spektren.

Von W. Wien.

Vorgetragen in der Sitzung am 4. März 1922.

Obwohl die Unterscheidung zwischen Bogenlinien und Funkenlinien in den Spektren keineswegs einheitlich ist, so pflegt man doch jetzt überwiegend als Bogenlinien solche zu bezeichnen, die von den ungeladenen Atomen ausgesandt werden, während Funkenlinien von elektrisch geladenen Atomen herrühren. Die Bogenlinien bedürfen zu ihrer Anregung einer geringeren Arbeitsleistung, weil bei ihnen nur der Vorgang der Lichterzeugung einzutreten braucht, während bei den Funkenlinien noch die Abtrennung eines Elektrons vorausgehen muß. Die bisherige Unterscheidung beruhte hauptsächlich auf der Beobachtung der Erregungsarbeit, die von Rau bei Wasserstoff und Heliumlinien genau gemessen, sonst nur in der Weise beurteilt wurde, daß solchen Linien, die leicht im Lichtbogen auftreten, die geringere Erregungsarbeit, den nur im Funken erregten der größere Energiebedarf zuzuschreiben berechtigt schien. Eine weitere Unterscheidung ist von Stark auf Grund der größeren oder geringeren Dopplerverschiebung versucht.

Alle diese Methoden geben unzweifelhaft Anhaltspunkte für die Entscheidung der Frage, ob eine Spektrallinie einem geladenen oder einem ungeladenen Atom angehört, sichere Schlüsse lassen sich aber aus ihnen nicht ziehen.

Die neue Methode, die wir jetzt kennen lernen wollen, beruht auf der elektrischen Ablenkung von Atomen, die in den Kanalstrahlen im höchsten Vakuum bewegt werden.

Wenn man Kanalstrahlen durch einen engen Spalt plötzlich in ein hohes Vakuum übertreten läßt, so fällt die Erneuerung der Lichterregung der bewegten Atome größtenteils

fort und man beobachtet ein Abklingen der vorher eingetretenen Erregung.

Läßt man nun den Kanalstrahl, nachdem er den Spalt verlassen hat und in das hohe Vakuum eingetreten ist, zwischen die Platten eines kleinen Kondensators von 2 mm Länge und 1 mm Abstand weitergehen, so werden bei Ladung des Kondensators die ungeladenen Atome ihren Weg ungestört fortsetzen, die geladenen dagegen abgelenkt werden.

Ist nun der Spalt, aus dem die Kanalstrahlen austreten, fein genug, so kann man den leuchtenden, aus dem Spalt tretenden Kanalstrahl durch die optischen Teile eines Spektrographen abbilden und erhält auf der photographischen Platte für jede Spektrallinie eine getrennte Abbildung des Kanalstrahls. Diejenigen Linien, die von neutralen Atomen ausgesandt werden, werden durch das elektrische Feld des Kondensators nicht beeinflußt erscheinen, während die Funkenlinien eine Ablenkung zeigen müssen.

Die Versuche wurden in der Weise durchgeführt, daß das hohe Vakuum, in das der Kanalstrahl eintrat, durch den Betrieb von 13 Diffusionspumpen aufrecht erhalten wurde. Die Kanalstrahlen wurden durch eine 60 plattige Influenzmaschine von Leuner, das elektrische Feld des Kondensators mit Hilfe zweier kleiner Hochspannungsdynamos in verschiedener Stärke (250 bis 1000 Volt) erzeugt.

Es zeigte sich nun, daß die Serienlinien des Wasserstoffs auch bei sehr starker Belichtung der photographischen Platte und verschiedenen ablenkenden Feldstärken keine Spur einer Ablenkung erkennen ließen. Sehr deutliche Ablenkung trat aber bei den sogenannten Funkenlinien des Sauerstoffs ein, die also ihren Namen mit Recht tragen.

Auch eine Reihe von Stickstofflinien zeigen Ablenkung, ebenso die negativen Stickstoffbanden, denen H. Rau bereits auf Grund seiner Beobachtungen der Dopplerverschiebung einen elektrisch positiv geladenen Träger zugeschrieben hatte.

München, Physikal. Institut der Univ.

Die Vorarbeiten zu einem Handschriftenverzeichnis der deutschen Sternforschung.

Von E. Zinner.

Vorgelegt von H. v. Seeliger in der Sitzung am 6. Mai 1922.

Die Geschichtsschreibung der deutschen Sternforschung benützte bisher meistens gedruckte Quellen. Ein Zurückgehen auf die Handschriften unterblieb fast immer, und so kam es, daß die übliche Darstellung der Sternforschung des Mittelalters ganz unzutreffend ist. Aber auch über spätere Jahrhunderte, nämlich das 17. und 18. Jahrhundert, sind die geschichtlichen Darstellungen nicht erschöpfend, weil viele der damals entstandenen Handschriften infolge der unglücklichen Zustände in Deutschland nicht veröffentlicht wurden. Sind doch nicht einmal Keplers Handschriften völlig erschöpft! Ist an eine Veröffentlichung selbst der wichtigsten Handschriften nicht zu denken, so erscheint es doch notwendig, ein Verzeichnis der die deutsche Sternforschung betreffenden Handschriften herzustellen, damit jeder auf diesem Gebiete Arbeitende sich über seine Quellen leicht unterrichten kann. Das Verzeichnis müßte umfassen die Handschriften der früher zum deutschen Kulturgebiet gehörigen Länder, nämlich Deutschland, Österreich, Schweiz, Belgien und Niederlande; ferner die im dreißigjährigen Kriege nach Rom und Schweden entführten Handschriften, sowie solche in den Bibliotheken zu Petersburg, Paris und London, soweit ihr deutscher Ursprung feststeht. Zurzeit ist es sehr schwer, einen Überblick über die in Betracht kommenden Handschriften zu erhalten. Die Sternwarten besitzen

aus der in Betracht kommenden Zeit, nämlich vor 1850, nur einige Schriften, weil früher nicht viel Wert auf ihre Aufbewahrung gelegt wurde, so daß zum Beispiel die Berliner Sternwarte die Beobachtungsbücher ihres Begründers nicht besitzt. Ein anderer Grund ist darin zu erblicken, daß die deutsche Sternforschung fortwährend ihren Sitz gewechselt hat. Er war im 12. Jahrhundert in Regensburg, im 14. in Erfurt, im 15. in Wien, Regensburg und Erfurt, im 16. in Leipzig, Kassel und Nürnberg, im 17. in Danzig, Tübingen und Nürnberg, im 18. in Wien, Mannheim und Berlin, dagegen in Frankreich vom 13. bis 19. Jahrhundert immer in Paris und in England in Oxford. Daher sind uns diese Staaten in der Erhaltung ihrer Handschriften überlegen. Kommt noch dazu, daß im 18. Jahrhundert viele Handschriften ins Ausland wanderten, so erklärt sich damit die Schwierigkeit, einen Überblick über das Vorhandene zu erhalten.

Schon die Erfassung der in Deutschland vorhandenen Handschriften ist nicht leicht. Nur ein Teil der Handschriften ist in gedruckten Verzeichnissen beschrieben, die anderen Handschriften, besonders aber kleiner Bibliotheken, nur in handschriftlichen Verzeichnissen. Um auch diese Handschriften zu berücksichtigen, wurden aus Schwenckes Adreßbuch der deutschen Bibliotheken sämtliche Bibliotheken mit Handschriftenbesitz ausgeschrieben und an alle, deren Verzeichnisse nicht in München vorhanden waren, eine Rundfrage nach astronomischen und astrologischen Handschriften gerichtet. Im ganzen wurde die Rundfrage an 258 Bibliotheken gestellt, von denen 57 nicht antworteten. Auf wiederholte Anfragen liefen noch 44 Antworten ein. Die meisten Antworten enthielten eine Mitteilung über das Vorhandensein oder Fehlen solcher Handschriften. Nur wenige konnten wegen Nichtordnung der Bibliothek keine entsprechende Antwort erteilen. Merkwürdig ist der Bescheid der Bibliothek des Fürsten Waldburg: „In dieser für den Adel immer noch bewegten Zeit dürfen derartige Anfragen zurzeit nicht beantwortet werden."

Wie weit sind die Angaben der Verzeichnisse und der

Antworten richtig? Diese Frage ist schwer zu beantworten. Selten nur kommt es vor, daß die angeblich astronomische Handschrift keine solche ist; so entpuppten sich einige astronomische Tafeln als Inhaltsverzeichnisse. Dagegen läßt sich behaupten, daß es viel mehr Handschriften gibt, als aus den Verzeichnissen folgt. Eine eingehende Nachprüfung ergab, daß die älteren Verzeichnisse, die nicht so ausführlich wie die Berliner oder Bamberger sind, für jeden astronomischen Sammelband ein oder zwei Handschriften zu wenig angegeben. Bisweilen ist für einen Sammelband mit mehreren, deutlich verschiedenen Arbeiten nur ein ganz allgemein gehaltener Titel angegeben, so daß man sich nicht des Eindruckes erwehren kann, daß vielen Bibliothekaren die Bestimmung astronomischer Handschriften sehr unangenehm war. Daß dabei gerade auf solche Gesichtspunkte, auf welche die Geschichtsschreibung besonderen Wert legen muß, nämlich auf die Anmerkungen und Berechnungen, nicht besonders geachtet wurde, nimmt nicht Wunder. Ganz der Aufmerksamkeit scheinen sich solche Handschriften zu entziehen, die Druckschriften beigebunden sind. So fanden sich in einer sonst vorzüglich geordneten Bibliothek mehrere Handschriften, die in gar keinem Verzeichnis standen. Kommen solche Fehler schon in gut geführten Bibliotheken vor, so ist dies bei den kleinen Bibliotheken noch viel mehr anzunehmen. Besonders aber werden die Antworten auf die Rundfrage zu Zweifeln Anlaß geben, da hier die Durchsicht des Verzeichnisses dem betreffenden Beamten oblag, der oft geneigt sein wird, auf Grund seiner Kenntnis das Vorhandensein entsprechender Handschriften von vornherein zu verneinen. Wie es in Österreich ging, so auch in Deutschland. Während dort die eigene Durchsicht einer ganzen Reihe von Handschriften auf Grund der Verzeichnisse zu Tage förderte, gelang es, verschiedene in deutschen Bibliotheken vorhandene und sogar durch Druck bekannte Handschriften aufzufinden, trotzdem sie in der Antwort nicht aufgeführt waren. Eine persönliche Durchsicht der Verzeichnisse der vielen kleinen deutschen Bibliotheken hätte sicher noch viel mehr Hand-

schriften auffinden lassen. Immerhin konnten durch das Entgegenkommen mehrerer Bibliotheken sämtliche dort befindlichen astronomischen Handschriften zur Durchsicht erhalten werden. Wenn es auch möglich ist, die astronomischen Sammelbände der großen Bibliotheken allmählich durchzusehen, so wird sich dies bei solchen Bibliotheken, die erklären, nichts derartiges zu besitzen, nicht durchführen lassen. Anzunehmen ist nur, daß solche Bibliotheken im Verhältnis zu den großen nicht viele solche Handschriften besitzen.

Bevor auf die Zahl der bis jetzt festgestellten Handschriften eingegangen werden soll, möge noch kurz der Umfang der Nachforschung angegeben werden. Das beabsichtigte Verzeichnis der Handschriften soll alle Handschriften aufführen, die für den Lehrbetrieb des Mittelalters und der Neuzeit und für die Entwickelung der Forschung wichtig sind; infolgedessen können griechische und orientalische Handschriften, da für die Allgemeinheit nicht verständlich, nicht berücksichtigt werden. Mitgenommen wurden die Lehrbücher der Sternforschung, ferner Tafelwerke und die Beschreibung der Werkzeuge, sowie Beobachtungen und Briefwechsel. Als Grenze wurde das Jahr 1850 für die Sternwarten angenommen, aber vereinzelte in Bibliotheken vorhandene jüngere Handschriften auch verzeichnet. Als Anwendungsgebiete der Sternforschung wurden, weil im Mittelalter untrennbar mit ihr verbunden, die kirchliche Osterrechnung und die Sterndeutung, ferner die Herstellung von Sonnenuhren mitgenommen. Um die für die Zeitrechnung wichtigen Kalender möglichst vollständig zu erfassen, wurden in den Staatsbibliotheken zu Wien und München mehrere hundert Kalender vor dem Jahre 1500 durchgesehen; etwa ein Fünftel davon war wichtig. Die Handschriften der Sterndeutung, die ihren Höhepunkt um 1500 erreichte, wurden sämtlich berücksichtigt, da später ihre Zahl stark abnimmt. Als nicht zur Sterndeutung gehörig schieden aus die Losbücher, der Kreis des Pythagoras u. a. Erdmessung und Wetterkunde wurden nur bis zum Jahre 1600 mitgenommen. Nicht berücksichtigt wurden einzelne Abhandlungen über Sternkunde, wie

sie oft in Vorlesungen über Mathematik oder Erdkunde vorkommen, auch nicht die Etymologie des Isidors.

Werden diese Einschränkungen gemacht, so ergeben sich bis jetzt 8544 Handschriften. Betrachtet man ihre Verteilung über die Jahrhunderte, wobei die an der Wende eines Jahrhunderts entstandenen Handschriften zur Hälfte zu dem einen, zur Hälfte zum anderen Jahrhundert gerechnet werden, so ergeben sich für das Alter der Handschriften folgende Zahlen: Dem 7. Jahrhundert gehören an 2, dem 8. 11, dem 9. 187, dem 10. 98, dem 11. 139, dem 12. 149, dem 13. 263, dem 14. 1542, dem 15. 3795, dem 16. 1275, dem 17. 647, dem 18. 316 und dem 19. 120. Deutlich zeigt sich in der ersten Zeit der Einfluß Karls des Großen, ferner das starke Anwachsen um 1300 und die infolge der Drucktätigkeit um 1500 einsetzende starke Abnahme der Handschriften. Bei den Handschriften wurden berücksichtigt die in Deutschland vorhandenen, ferner die in Österreich im Jahre 1920 von mir festgestellten, sowie die in den großen Bibliotheken der Schweiz, Belgiens und der Niederlande befindlichen. Unter den 8544 Handschriften sind viele mehrfache Abschriften derselben Arbeit. Die Anzahl der einzelnen Arbeiten dürfte 3000 nicht übersteigen.

Die Feststellung des Verfassers und Titels ist das erste Erfordernis für das Verzeichnis. Da die mittelalterlichen Abschreiber oft keine Überschrift mitteilten, so ist die spätere Bestimmung des Verfassers schwierig. Aber auch wo Verfasser genannt sind, hat es sich herausgestellt, daß der Name schon im Mittelalter falsch angegeben war. Fehlt der Name des Verfassers, so ist es möglich, eine nicht benannte Handschrift einem bestimmten Verfasser zuzuschreiben, wenn die Anfangs- und Endworte, sowie der Inhalt bekannt sind. Da diese Worte in vielen Verzeichnissen nicht angegeben sind, so war häufig die persönliche Durchsicht der Handschrift nötig. Auf diese Weise gelang es, die Zahl der Handschriften unbekannter Verfasser herabzumindern und zugleich für bekannte Arbeiten eine viel größere Zahl von Abschriften festzustellen, als bisher angenommen wurde. So führte Herr R. Klug 12 Ab-

schriften der Kalender des Johann von Gmunden an, während sich bis jetzt 91 nachweisen ließen. Ferner wies Herr Tannery die Anwesenheit von 10 Abschriften des Quadranten des Robert für das deutsche Kulturgebiet nach, während mindestens 25 vorhanden sind. Ferner weist Herr Grauert in seiner Schrift über den Meister Johann von Toledo eine Reihe von Vorhersagen infolge der Zusammenkunft der Planeten für die Jahre 1179, 1226, 1229, 1329 u. a. nach. Diese Reihe läßt sich nunmehr leicht ergänzen, da auch für die Jahre 1190, 1317, 1319, 1425 und 1432 ähnliche Vorhersagen vorliegen.

Häufig kommt es im Mittelalter vor, daß Arbeiten bekannter Verfasser durch Einfügen von Tafeln oder Erklärungen für den Gebrauch bestimmter Schulen geeignet gemacht wurden, wie es mit der Arbeit des Messehalah über das Astrolab durch die Pariser Schule und der Arbeit des Walingford über das Albion durch die Wiener Schule geschah. Diese Umwandlungstätigkeit ging so weit, daß die ursprüngliche Arbeit ihr früheres Aussehen verlor und nur noch ihre Teile unter verschiedenen Namen vorkommen, wie es mit der Arbeit des Robert über den Quadranten geschah. Auf die Feststellung dieser Zusammenhänge wurde großer Wert gelegt. Wichtig sind die zahlreichen Tafelwerke, die besonders deutlich die Tätigkeit der Schulen und den Fortschritt der Wissenschaft anzeigen. Die vorhandenen Tafeln reichen bis ins 12. Jahrhundert zurück, so daß es möglich ist, von der Entwicklung dieses Zweiges der Sternforschung bei den christlichen Völkern ein vollständiges Bild zu geben.

Der Endzweck der Zusammenstellung ist die Herstellung eines Verzeichnisses, das so genau als möglich die Handschriften nach Verfasser und Inhalt bestimmt, dabei auch den Zusammenhang mit anderen gleichartigen Abhandlungen darlegt, also damit den Grund zu einer quellenmäßigen Geschichte der deutschen Sternforschung legt.

Die Lagallysche Formel für den Flüssigkeitsdruck.

Von **Heinrich Liebmann** in Heidelberg.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 6. Mai 1922.

M. Lagally hat den unter der Annahme der Gültigkeit der Bernouillischen Gleichung berechneten Druck einer stationären Flüssigkeitsströmung auf eine geschlossene Fläche zurückgeführt auf die in der Strömung vorhandenen Quellen und Wirbel[1]). Bei der großen Bedeutung, die dieses Ergebnis besitzt, ist es von Interesse, daß seine Formel in aller Kürze auch ohne Dyadenrechnung unmittelbar aus geläufigen Sätzen der gemeinen Vektoranalysis gewonnen werden kann.

Ausgangspunkt ist die Formel für den Druck

$$1)\qquad \mathfrak{P}_0 = -\int_0 p\,\mathfrak{n}\,df = \frac{\varrho}{2}\int_0 v^2\,\mathfrak{n}\,df.$$

Hierin bedeutet df das Oberflächenelement, $\mathfrak{n}$ den Einheitsvektor in der Richtung der inneren Normale, ϱ die Dichtigkeit.

Wir bedienen uns jetzt der bekannten Differentialformeln:

$$2)\qquad \operatorname{div}(F\mathfrak{v}) = F\operatorname{div}v + (\mathfrak{v}\nabla)F,$$

$$3)\qquad \nabla v^2 = 2(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{v} + 2\,\mathfrak{v}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}$$

und der Gaußschen Umwandlung eines Raumintegrals in ein Oberflächenintegral

$$4)\qquad \int_R \nabla F\,d\tau = -\int_0 F\,\mathfrak{n}\,df,$$

[1]) Über den Druck einer strömenden Flüssigkeit auf eine geschlossene Fläche. Münchener Berichte 1921, S. 209—226.

die für Vektoren die Gestalt annimmt

$$\int_R \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\tau = -\int_0 (\mathfrak{v}\,\mathfrak{n})\, df. \tag{5}$$

(2) und (5) geben dann

$$\int_R F \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\tau = -\int_R (\mathfrak{v}\nabla) F\, d\tau - \int_0 F(\mathfrak{v}\,\mathfrak{n})\, df.$$

Diese Formel enthält nur skalare Elemente, nämlich div $\mathfrak{v}$, $(\mathfrak{v}\,\mathfrak{n})$ und das Symbol $(\mathfrak{v}\nabla)$. Man kann daher für F auch einen Vektor, z. B. $\mathfrak{v}$ einsetzen und erhält

$$\int_R \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\tau = -\int_R (\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{v}\, d\tau - \int_0 \mathfrak{v}\,(\mathfrak{v}\,\mathfrak{n})\, df. \tag{5'}$$

Nach (3) ist aber

$$\int_R (\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{v}\, d\tau = -\int_R \mathfrak{v} \times \operatorname{curl} \mathfrak{v}\, d\tau + \tfrac{1}{2}\int_R \nabla \mathfrak{v}^2\, d\tau$$

und nach (4)

$$\int_R \nabla \mathfrak{v}^2\, d\tau = -\int_0 \mathfrak{v}^2\, \mathfrak{n}\, df.$$

Durch Verwendung aller dieser Beziehungen erhält man[1])

$$\mathfrak{P}_0 \doteq \frac{\varrho}{2}\int_0 \mathfrak{v}^2\,\mathfrak{n}\, df = \varrho\left\{\int_0 \mathfrak{v}\,(\mathfrak{v}\,\mathfrak{n})\, df + \int_R \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\tau - \int_R \mathfrak{v} \times \operatorname{curl} \mathfrak{v}\, d\tau\right\}. \tag{6}$$

Wendet man diese Formel auf die Strömung im Innern einer geschlossenen Fläche F an (inneres Problem) und beachtet, daß an der Oberfläche $\mathfrak{v}$ auf $\mathfrak{n}$ senkrecht steht, also $(\mathfrak{v}\,\mathfrak{n})$ gleich Null ist, so folgt

[1]) Lagally, a. a. O., S. 211 steht die entsprechende mit einer Dyade behaftete Formel (3). Unseren Formeln (4) und (8) entsprechen bei Lagally (4) und (9).

$$(7) \qquad \mathfrak{P}_F = \varrho \int\limits_R \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{v} \, d\tau - \varrho \int\limits_R \mathfrak{v} \times \operatorname{curl} \mathfrak{v} \, d\tau,$$

womit der Druck auf singuläre Stellen zurückgeführt und seine Unabhängigkeit von der Gestalt der Fläche erwiesen ist.

Um den Druck auf eine umströmte Fläche zu berechnen (äußeres Problem), dient die Formel, die aus (6) folgt:

$$\mathfrak{P}_F = -\mathfrak{P}_K + \varrho \int\limits_K \mathfrak{v}(\mathfrak{v}\mathfrak{n}) \, df + \varrho \int\limits_Z \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{v} \, d\tau - \varrho \int\limits_Z \mathfrak{v} \times \operatorname{curl} \mathfrak{v} \, d\tau.$$

Hierin bedeutet Z den Zwischenraum zwischen F und einer F umschließenden Kugel K,

$$\mathfrak{P}_K = \frac{\varrho}{2} \int\limits_K v^2 \mathfrak{n} \, df$$

den Innendruck auf die Kugelfläche.

Um $\mathfrak{P}_F$ zu berechnen, bedürfen wir also noch des Wertes von

$$-\tfrac{1}{2} \int\limits_K v^2 \mathfrak{n} \, df + \int\limits_K \mathfrak{v}(\mathfrak{v}\mathfrak{n}) \, df.$$

Die Kugel K (Radius r) soll so groß gewählt werden, daß die Singularitäten im Innern liegen, und die Geschwindigkeit soll in der Umgebung von $r^{-1} = 0$, also im Unendlichen, das Potential besitzen

$$\varphi = ax + A_1 r^{-1} + A_2 r^{-2} + \cdots,$$

dabei ist dann a die rein translatorische, zur x-Achse parallele Geschwindigkeit im Unendlichen.

Um nun anzudeuten, daß wir für K eine Kugel mit unbegrenzt wachsendem Radius nehmen, schreiben wir R für r. In den Flächenintegralen sind dann Glieder von der Ordnung R^{-3} zu vernachlässigen.

Führt man nun noch Polarkoordinaten ein, setzt also

$$x = R\cos\vartheta, \quad y = R\sin\vartheta\cos\varphi, \quad z = R\sin\vartheta\sin\varphi,$$

so wird das Oberflächenelement der Kugel

$$df = R^2 d\omega = R^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi,$$

ferner

$$\mathfrak{n} = -i\cos\vartheta - j\sin\vartheta\cos\varphi - k\sin\vartheta\sin\varphi,$$

$$\mathfrak{v} = i a - A_1 R^{-2}(i\cos\vartheta + j\sin\vartheta\cos\varphi + k\sin\vartheta\sin\varphi),$$

$$v^2 = a^2 - 2 a A_1 \cos\vartheta \, R^{-2},$$

$$(\mathfrak{v}\mathfrak{n}) = -a\cos\vartheta + A_1 R^{-2},$$

also

$$-\tfrac{1}{2} v^2 \mathfrak{n} + \mathfrak{v}(\mathfrak{v}\mathfrak{n}) = i\left(\frac{a^2}{2}\cos\vartheta + a A_1 R^{-2}\right) + \cdots$$

Alle weiteren Glieder sind von der Ordnung R^{-3} oder fallen wegen des Faktors $\cos\varphi$ bzw. $\sin\varphi$ bei der Integration über die Kugelfläche fort.

Demnach bleibt nur

$$-\tfrac{1}{2}\int\limits_K v^2 \mathfrak{n}\, df + \int\limits_K \mathfrak{v}(\mathfrak{v}\mathfrak{n})\, df = a A_1 R^{-2}\int R^2 d\omega = 4\pi a A_1$$

und daher

$$\mathfrak{P}_F = 4\pi a A_1 + \varrho\int \mathfrak{v}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{v}\, d\tau - \varrho\int \mathfrak{v}\times\mathrm{curl}\,\mathfrak{v}\, d\tau, \tag{8}$$

wobei nunmehr die Integrale über den ganzen Außenraum zu erstrecken sind.

Ist insbesondere $\mathrm{div}\,\mathfrak{v} = \mathrm{curl}\,\mathfrak{v} = 0$ und außerdem $A_1 = 0$, also die Geschwindigkeit im Unendlichen von höherer als der zweiten Ordnung translatorisch, so erhält man den bekannten, aber, wie es scheint, zuerst von Lagally wirklich bewiesenen Satz, daß der Flüssigkeitsdruck einer singularitätenfreien translatorischen Strömung auf eine geschlossene Fläche die Resultante Null ergibt, ein Moment kann noch übrig bleiben. Ich darf hier mitteilen, daß der Beweis dieses Satzes von F. Klein in einer Vorlesung als sehr wichtige Aufgabe bezeichnet worden ist.

Man kannte bisher wohl nur einzelne Beispiele, unter denen die translatorische Umströmung der Kugel vom Radius c, berechnet aus dem Geschwindigkeitspotential

$$\varphi = a x \left(1 + \frac{c^3 r^{-3}}{2}\right),$$

also mit der Geschwindigkeit

$$\mathfrak{v} = i a \left(1 + \frac{c^3 r^{-3}}{2}\right) - 3 \frac{a c^3 x r^{-5}}{2} (i x + j y + k z),$$

$$(\mathfrak{v}\,\mathfrak{r}) = a x \left(1 + \frac{c^3 r^{-3}}{2} - \frac{3 c^3 r^{-3}}{2}\right),$$

die auf der Kugel

$$\mathfrak{v} = i x + j y + k z, \qquad \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r} = c^2$$

tangentiale Richtung hat, das bekannteste ist.

In derselben Weise kann auch das Moment des Flüssigkeitsdruckes berechnet werden. Mit $\mathfrak{r}$ bezeichnen wir jetzt die Strecken vom Bezugspunkt nach den Elementen der Fläche bzw. der Flüssigkeit und erhalten dann zunächst

(9) $$\mathfrak{M}_0 = \frac{\varrho}{2} \int_0 v^2\, \mathfrak{r} \times \mathfrak{n}\, df.$$

Wir formen nun um mit Hilfe einer zuerst von A. Föppl aufgestellten, (4) und (5) an die Seite tretenden Beziehung

(10) $$\int_R \operatorname{curl} \mathfrak{v}\, d\tau = - \int_0 \mathfrak{v} \times \mathfrak{n}\, df,$$

und erhalten

$$\mathfrak{M}_0 = - \frac{\varrho}{2} \int \operatorname{curl} v^2\, \mathfrak{r}\, d\tau.$$

Beachtet man, daß in

$$\operatorname{curl} v^2\, \mathfrak{r} = v^2 \operatorname{curl} \mathfrak{r} + \nabla v^2 \times \mathfrak{r}$$

das erste Glied rechts gleich Null ist, so erhält man

(11) $$\mathfrak{M}_0 = - \frac{\varrho}{2} \int_R \nabla v^2 \times \mathfrak{r}\, d\tau.$$

Dieses Integral soll dann wieder aufgespalten werden in Raumintegrale, die nur curl $\mathfrak{v}$ und div $\mathfrak{v}$ enthalten und ein Flächenintegral. Diese Aufgabe läßt sich mit wenigen Schritten durchführen.

Aus (3) folgt durch vektorielle Multiplikation mit $\mathfrak{r}$

$$\tfrac{1}{2}\nabla v^2 \times \mathfrak{r} = (\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{v} \times \mathfrak{r} + (\mathfrak{v} \times \operatorname{curl}\mathfrak{v}) \times \mathfrak{r}$$

und der Formel (5′) tritt an die Seite

$$\int_R \operatorname{div}\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{r} \times \mathfrak{v}\, d\tau = -\int_R (\mathfrak{v}\nabla)(\mathfrak{r} \times \mathfrak{v})\, d\tau - \int_{\mathfrak{O}} (\mathfrak{r} \times \mathfrak{v})(\mathfrak{v}\mathfrak{n})\, df.$$

Durch Zusammensetzung erhält man dann, der Formel (6) genau entsprechend:

$$\text{(12)}\quad \begin{aligned}\mathfrak{M}_0 = \varrho \Big\{ &\int_{\mathfrak{O}} (\mathfrak{r} \times \mathfrak{v})(\mathfrak{v}\mathfrak{n})\, df + \int_R (\mathfrak{r} \times \mathfrak{v}) \operatorname{div}\mathfrak{v}\, d\tau \\ &- \int_R (\mathfrak{v} \times \operatorname{curl}\mathfrak{v}) \times \mathfrak{r}\, d\tau \Big\}.\end{aligned}$$

Betrachten wir jetzt die Strömung im Innern einer Fläche F, so ist wieder auf der Fläche $(\mathfrak{v}\mathfrak{n})$ gleich Null, so daß sich, entsprechend (7) das Moment ergibt

$$\text{(13)}\quad \mathfrak{M}_F = \varrho \left\{ \int (\mathfrak{r} \times \mathfrak{v}) \operatorname{div}\mathfrak{v}\, d\tau - \int (\mathfrak{v} \times \operatorname{curl}\mathfrak{v}) \times \mathfrak{r}\, d\tau \right\}.$$

Die Integrale sind über den Innenraum zu erstrecken, und wieder erkennt man, daß nur die Gebiete, in denen Divergenz und curl von Null verschieden sind, Beiträge liefern.

Um auch die umströmte Fläche zu behandeln, wobei wir, wie oben die Geschwindigkeit „im Unendlichen translatorisch" nehmen, haben wir zunächst entsprechend der nach (7) folgenden Formel

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_F = -\mathfrak{M}_K + \varrho \Big(&\int_K (\mathfrak{r} \times \mathfrak{v})(\mathfrak{v}\mathfrak{n})\, df + \int_Z (\mathfrak{r} \times \mathfrak{v}) \operatorname{div}\mathfrak{v}\, d\tau \\ &- \int_Z (\mathfrak{v} \times \operatorname{curl}\mathfrak{v}) \times \mathfrak{r}\, d\tau \Big).\end{aligned}$$

Als Bezugspunkt nehmen wir jetzt den Mittelpunkt der Kugel K vom Radius R und lassen R unbegrenzt wachsen. $\mathfrak{M}_K$ ist gleich Null, weil der Druck auf die Flächenelemente der Kugel die Richtung nach dem Bezugspunkt hat. Es bleibt dann noch das erste in der Klammer stehende Integral zu untersuchen; dabei ist wieder $\mathfrak{v}$ aus dem Geschwindigkeitspotential

$$\varphi = ax + A_1 r^{-1} + A_2 r^{-2} + \cdots$$

abzuleiten. A_1 soll nach oben getroffener Festsetzung eine Konstante sein.

Ferner ist, wie oben gezeigt, auf der Kugel

$$(\mathfrak{v}\mathfrak{n}) = -a\cos\vartheta + A_1 R^{-2} + \cdots,$$

$$\mathfrak{v} = ia - A_1 R^{-2}(i\cos\vartheta + j\sin\vartheta\cos\varphi + k\sin\vartheta\cos\varphi) + \cdots,$$

also wegen

$$\mathfrak{r} = R(i\cos\vartheta + j\sin\vartheta\cos\varphi + k\sin\vartheta\sin\varphi),$$

$$\mathfrak{v}\times\mathfrak{r} = aR(k\sin\vartheta\cos\varphi - j\sin\vartheta\sin\varphi) + R^{-2}(\cdot\,\cdot) + \cdots$$

Bei der Integration über die Kugeloberfläche K, also bei der Bildung von

$$\int_K (\mathfrak{r}\times\mathfrak{v})\,(\mathfrak{v}\mathfrak{n})\,df$$

kommt es nun wesentlich darauf an, ob auch A_2 eine Konstante (und nicht eine homogene Funktion nullter Ordnung von x, y, z) ist. Während im zweiten Fall der Wert des Integrals wesentlich abhängt von der Gestalt dieser Funktion, wird im ersten Fall das Integral bei unbeschränkt wachsendem R zu Null.

Wir haben also das weitere Ergebnis:

Unter der Voraussetzung, daß das Geschwindigkeitspotential in der Umgebung von $\frac{1}{r} = 0$ sich in der Form darstellen läßt

$$\varphi = a x + \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{r^2} + \cdots,$$

wobei A_1 und A_2 Konstanten sind, gilt:

$$(14) \quad \mathfrak{M}_F = \varrho \left(\int (\mathfrak{r} \times \mathfrak{v}) \operatorname{div} \mathfrak{v} \, d\tau - \int (\mathfrak{v} \times \operatorname{curl} \mathfrak{v}) \times \mathfrak{r} \, d\tau \right).$$

Dabei sind die Integrale über den gesamten Außenraum der Fläche zu erstrecken. Diese Formel tritt (8) an die Seite und ist frei von A_1.

Über den Konvergenzexponenten der Fourierschen Reihen gewisser Funktionenklassen.

Von **Otto Szász** in Frankfurt a. M.

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 6. Mai 1922.

Einleitung.

Bezüglich der absoluten Konvergenz einer trigonometrischen Reihe

$$(1) \qquad (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \cdots$$

kann man nach Sätzen von Denjoy (C. R. 155, 1912, II, S. 135 bis 136), Lusin (C. R. 155, S. 580—582) und Fatou[1]) zwei Fälle unterscheiden: die Reihe (1) ist entweder überall absolut konvergent, oder sie ist es höchstens in einer Punktmenge vom Maße Null, je nachdem die unendliche Reihe

$$(2) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \sqrt{a_\nu^2 + b_\nu^2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu - i b_\nu| = \sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu|,$$

$$c_\nu = a_\nu - i b_\nu, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

konvergiert oder divergiert.

Wenn also die Reihe (1) in einer Punktmenge von positivem Maß absolut konvergieren soll, so muß die Reihe (2) konvergieren, und (1) ist dann offenbar die Fouriersche Reihe einer durchweg stetigen Funktion[2]). Es ist daher von Interesse,

---

[1]) Man vgl. insbesondere P. Fatou, Sur la convergence absolue des séries trigonométriques, Bulletin de la société mathematique de France 41, 1913, S. 47—53.

[2]) Es ist dann sogar die Potenzreihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu z^\nu$ für $|z| \leq 1$ absolut und gleichmäßig konvergent, und die Reihe (1) stimmt offenbar überein mit dem Realteil dieser Potenzreihe für $z = e^{ix}$.

Bedingungen für die stetige, nach 2π periodische Funktion $f(x)$ anzugeben, unter denen die zur Fourierschen Entwicklung

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

gehörige Reihe (2) konvergiert. Den allgemeinsten hierher gehörigen Satz hat Herr S. Bernstein[1]) aufgestellt:

Satz I. Wenn die Funktion $f(x)$ einer Lipschitzschen Bedingung vom Grade $\alpha > \frac{1}{2}$ genügt, so ist ihre Fouriersche Reihe absolut konvergent (sc. überall); dagegen gibt es zu jeder Zahl $\beta < \frac{1}{2}$ Funktionen, die einer Lipschitzschen Bedingung vom Grade β genügen und deren Fouriersche Reihe nicht absolut konvergiert[2]).

S. Bernstein gibt hierfür keinen Beweis an, sondern bemerkt nur, daß sich derselbe auf folgende Tatsache stützt, die er dann herleitet:

Das Maximum von

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_n, \quad \nu = 1, 2, \ldots n, \quad n = \text{Primzahl}$$

für die Gesamtheit aller trigonometrischen Polynome n^{ter} Ordnung

$$T_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \varrho_\nu \cos(\nu x - \alpha_\nu), \quad \varrho_\nu \geq 0,$$

die der Bedingung

$$|T_n(x)| \leq 1 \quad \text{für} \quad 0 \leq x < 2\pi$$

genügen, hat die Größenordnung $\sqrt{n}$.

Von den Untersuchungen S. Bernsteins ausgehend gelange ich im folgenden zu einem einfachen Beweis und einer Verschärfung des Satzes I, indem ich eine allgemeinere Fragestellung behandle. Ich sage: eine Klasse (K) stetiger Funktionen besitzt den Konvergenzexponenten γ, wenn einerseits für die Fouriersche Reihe irgend einer Funktion aus (K) und für jedes $\varkappa > \gamma$ die Reihe

[1]) Man vgl. S. Bernstein, Sur la convergence absolue des séries trigonométriques. Comptes rendus 158 (I, 1914), S. 1661—63.

[2]) Gemeint ist offenbar: nicht für jedes x.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu^2+b_\nu^2)^{\frac{\varkappa}{2}}=\sum_{\nu=1}^{\infty}|c_\nu|^\varkappa,\quad (c_\nu=a_\nu-i\,b_\nu)$$

konvergiert, während es andererseits zu jedem $\varkappa<\gamma$ eine Funktion in der Klasse (K) gibt, so daß die zugehörige Reihe $\sum|c_\nu|^\varkappa$ divergiert. Herr T. Carlemann hat gezeigt, daß die Klasse aller stetigen Funktionen den Konvergenzexponenten $\gamma=2$ besitzt, wobei natürlich $\gamma\leqq 2$ längst bekannt ist. Etwas schärfere Resultate erhielt ich in meiner Arbeit: Über Potenzreihen, die im Einheitskreise beschränkte Funktionen darstellen[1]). Wird die Klasse (K) aus den stetigen Funktionen $f(x)$ gebildet, die einer Lipschitzschen Bedingung vom Grade α genügen, d. h. gibt es zu jedem $f(x)$ eine von x unabhängige Größe λ, so daß

$$|f(x)-f(u)|\leqq\lambda|x-u|^\alpha \tag{3}$$

für alle x und u, so ist γ eine Funktion von α, die offenbar mit wachsendem α monoton abnimmt, und der Satz I ist gleichbedeutend mit den Ungleichungen:

$$\gamma(\alpha)\leqq 1 \text{ für } \alpha>\tfrac{1}{2} \text{ und } \gamma(\alpha)\geqq 1 \text{ für } \alpha<\tfrac{1}{2}.$$

Im folgenden wird für $0<\alpha\leqq 1$ $\gamma(\alpha)$ genau bestimmt; es ergibt sich:

$$\gamma(\alpha)=\frac{2}{2\alpha+1},\quad 0<\alpha\leqq 1,$$

mit der Verschärfung, daß eine nur von α abhängige Potenzreihe $\sum_0^\infty \gamma_\nu z^\nu$ angegeben wird, die im abgeschlossenen Einheitskreise eine der Lipschitzschen Bedingung vom Grade α genügende Funktion $G(z)$ darstellt, wobei $\sum|\gamma_\nu|^\varkappa$ für jedes $\varkappa<\frac{2}{2\alpha+1}$ divergiert.

Schließlich ersetze ich die Bedingung (3) durch eine weit allgemeinere, während der Konvergenzexponent derselbe bleibt (vgl. Satz III).

---

[1]) Math. Zeitschr. 8, 1920, S. 222—236. Daselbst Literaturnachweis.

§ I. Beweis der Relation $\gamma(\alpha) \leq \frac{2}{2\alpha+1}$.

Hilfssatz 1. Es sei $0 < \alpha < 1$; die stetige Funktion

$$\text{(F)} \quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots$$

genüge der Bedingung

$$(3') \qquad |f(x) - f(u)| \leq \lambda |x - u|^\alpha$$

für alle x und u; ferner sei

$$(4) \begin{cases} s_0 = \frac{a_0}{2}, \; s_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x), \; n = 1, 2, 3, \ldots \\ \sigma_n(x) = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n}, \; n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Dann ist

$$(5) \qquad |\sigma_n(x) - f(x)| \leq \frac{\lambda C}{n^\alpha}, \; 0 \leq x < 2\pi, \; n = 1, 2, 3, \ldots,$$

wobei C nur von α abhängt (nicht von f, λ und x).

Aus der bekannten Formel

$$(L) \sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 [f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)] \, dt$$

und aus (3′) folgt nämlich sofort

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leq \frac{2^{\alpha+1}\lambda}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 t^\alpha \, dt,$$

und hieraus wegen

$$\sin t > \frac{2}{\pi} t \text{ für } 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

weiter

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{2^{\alpha+1}\lambda}{n\pi} \cdot \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{t^{2-\alpha}} \, dt.$$

Setzt man hier

$$n t = \tau, \text{ also } dt = \frac{1}{n} d\tau, \ t^{2-\alpha} = \frac{\tau^{2-\alpha}}{n^{2-\alpha}},$$

so wird

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{2^{\alpha-1}\pi\lambda}{n} \int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\tau}{n^{\alpha-1}\tau^{2-\alpha}} d\tau < \frac{2^\alpha \pi\lambda}{n^\alpha} \int_0^\infty \frac{\sin^2\tau}{\tau^{2-\alpha}} d\tau,$$

womit der Hilfssatz 1 bewiesen ist[1]).

Hilfssatz 2. Für nicht negative d_ν, δ_ν und für $p \geq 1$ gilt die Ungleichung:

$$\sum_{\nu=n_1}^{n_2} d_\nu \delta_\nu \leq \left(\sum_{\nu=n_1}^{n_2} d_\nu \delta_\nu^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{\nu=n_1}^{n_2} d_\nu\right)^{1-\frac{1}{p}} \text{[2])}. \tag{6}$$

Insbesondere für $d_\nu = 1$ ($\nu = n_1, n_1 + 1, \ldots n_2$) wird

$$\sum_{\nu=n_1}^{n_2} \delta_\nu \leq n^{1-\frac{1}{p}} \left(\sum_{\nu=n_1}^{n_2} \delta_\nu^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad n = n_2 - n_1 + 1. \tag{7}$$

Die Ungleichung $\gamma(\alpha) \leq \frac{2}{2\alpha + 1}$ ergibt sich nun folgendermaßen: es ist offenbar nach (F) und (4)

$$f(x) - \sigma_n(x) \sim \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu (a_\nu \cos\nu x + b_\nu \sin\nu x) + \sum_{\nu=n}^{\infty} (a_\nu \cos\nu x + b_\nu \sin\nu x),$$

und hiernach

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\sigma_n(x) - f(x)]^2 dx = \frac{1}{n^2} \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu^2 (a_\nu^2 + b_\nu^2) + \sum_{\nu=n}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2).$$

Hieraus und aus (5) folgt nun sofort

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2) = \sum_{\nu=n}^{\infty} |c_\nu|^2 \leq \frac{2\lambda^2 C^2}{n^{2\alpha}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{8}$$

---

[1]) Man vgl. S. Bernstein, Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues. Acad. Roy. de Belgique, Classe des sciences. Mémoires, II. Série, t. IV. Bruxelles 1912, S. 1—104; insb. S. 88—89.

[2]) Man vgl. z. B. Jensen, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, Acta math. 30, S. 175—193; insb. S. 181.

Aber die Anwendung der Ungleichung (7) für $p = \frac{2}{\varkappa}$, $0 < \varkappa \leqq 2$ liefert

$$\sum_{\nu=1+2^\mu}^{2^{\mu+1}} |c_\nu|^\varkappa \leqq 2^{\mu\left(1-\frac{\varkappa}{2}\right)} \left(\sum_{\nu=1+2^\mu}^{2^{\mu+1}} |c_\nu|^2\right)^{\frac{\varkappa}{2}}, \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots,$$

und mit Rücksicht auf (8) ergibt sich nun

$$\sum_{\nu=1+2^\mu}^{2^{\mu+1}} |c_\nu|^\varkappa < 2^{\mu\left(1-\frac{\varkappa}{2}\right)} \frac{2^{\frac{\varkappa}{2}} \lambda^\varkappa C^\varkappa}{2^{\mu\alpha\varkappa}} < \frac{2^\varkappa \lambda^\varkappa C^\varkappa}{2^{\mu(\alpha\varkappa+\frac{1}{2}\varkappa-1)}}.$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar die Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu|^\varkappa$ für

$$(\alpha + \tfrac{1}{2})\varkappa - 1 > 0, \quad \text{d. h.} \quad \varkappa > \frac{2}{2\alpha+1}.$$

Damit ist die Ungleichung $\gamma(\alpha) \leqq \frac{2}{2\alpha+1}$ bewiesen.

§ 2. Beweis der Relation $\gamma(\alpha) \geqq \frac{2}{2\alpha+1}$.

Hilfssatz 3. Es sei q eine Primzahl $\equiv 1$ mod. 4, und $\left(\frac{\nu}{q}\right)$ das Legendresche Symbol $\left[\left(\frac{\nu}{q}\right) = +1\right.$ oder -1, je nachdem ν für den Modul q quadratischer Rest ist oder nicht; $\left.0 < \nu < q\right]$. Ferner sei

$$\frac{2}{q^{3/2}}(q-\nu)\left(\frac{\nu}{q}\right) = a_\nu^{(q)}, \quad \nu = 1, 2, \ldots q-1 \text{ und}$$

$$\tfrac{1}{2}\left(a_{q-1}^{(q)} + a_{q-2}^{(q)} z + \cdots + a_1^{(q)} z^{q-2} + a_1^{(q)} z^q + a_2^{(q)} z^{q+1} + \cdots \right.$$
$$\left. + a_{q-1}^{(q)} z^{2(q-1)}\right) = \sum_{\nu=0}^{2q-2} C_\nu^{(q)} z^\nu = g_q(z).$$

Dann ist

$$|g_q(z)| \leqq 1 \text{ für } |z| \leqq 1, \text{ und}$$

$$\sum_{\nu=0}^{2q-2} |C_\nu^{(q)}| = \frac{q-1}{\sqrt{q}}.$$

Für den Beweis verweise ich auf die S. 136 und S. 137 zitierten Arbeiten.

Hilfssatz 4. Es sei $P(z)$ ein Polynom n^{ten} Grades, das der Ungleichung

(9) $$|P(z)| \leq 1 \text{ für } |z| \leq 1$$

genügt: ε sei eine positive Zahl ≤ 1. Dann ist

$$|P(z) - P(\zeta)| \leq 2n^\varepsilon |z - \zeta|^\varepsilon \text{ für } |z| \leq 1, |\zeta| \leq 1.$$

Zum Beweise bemerke ich zunächst, daß aus (9)

(10) $$|P'(z)| \leq n \text{ für } |z| \leq 1$$

folgt[1]. Ferner ist nach einem auf Darboux[2] zurückgehenden Mittelwertsatz

$$P(z) - P(\zeta) = \varrho(z-\zeta) P'(\zeta + \vartheta(z-\zeta)), \quad 0 \leq \vartheta \leq 1, \quad |\varrho| \leq 1.$$

Hieraus und aus (10) folgt

$$|P(z) - P(\zeta)| \leq n|z - \zeta| \text{ für } |z| \leq 1, \ |\zeta| \leq 1,$$

also auch

(11) $$|P(z) - P(\zeta)|^\varepsilon \leq n^\varepsilon |z - \zeta|^\varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Nun ist mit Rücksicht auf (9) für $0 < \varepsilon \leq 1$

$$|P(z)-P(\zeta)| = |P(z)-P(\zeta)|^\varepsilon |P(z)-P(\zeta)|^{1-\varepsilon} \leq 2^{1-\varepsilon} |P(z)-P(\zeta)|^\varepsilon,$$

und aus (11) folgt weiter

$$|P(z) - P(\zeta)| \leq 2n^\varepsilon |z - \zeta|^\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \text{ Qu. e. d.}$$

Es sei jetzt

$$1 < q_1 < q_2 < q_3 < \cdots$$

eine wachsende Folge von Primzahlen, die den Bedingungen genügen:

(12) $$q_{\nu-1} \equiv 1 \pmod{4}, \quad q_\nu \geq (q_1 + q_2 + \cdots + q_{\nu-1}), \quad \nu = 2, 3, 4, \cdots$$

(12') $$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\log q_\nu} \text{ konvergiere.}$$

---

[1] Man vgl. etwa meine Arbeit: Ungleichungen für die Koeffizienten einer Potenzreihe, Math. Zeitschr. 1, 1918, S. 163—183; insb. S. 181.

[2] Man vgl. z. B. Enzykl. d. math. Wiss., Bd. II, Teil I, S. 68.

Ich setze zur Abkürzung

$n_0 = 0,\ n_\nu = q_1 + q_2 + \cdots + q_\nu,\ g_{q_\nu}(z) = G_\nu(z),\ \nu = 1, 2, 3, \ldots,$

dann ist die unendliche Reihe

$$\begin{aligned}(13)\qquad &\frac{G_1(z)}{q_1^\alpha \beta_1} + z^{2n_1-1}\frac{G_2(z)}{q_2^\alpha \beta_2} + z^{2n_2-1}\frac{G_3(z)}{q_3^\alpha \beta_3} + \cdots \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} z^{2n_{\nu-1}-\nu+1}\frac{G_\nu(z)}{q_\nu^\alpha \beta_\nu},\end{aligned}$$

wobei $\beta_1 \leqq \beta_2 \leqq \beta_3 \leqq \cdots$ positive Zahlen sind, für $|z| \leqq 1$ gleichmäßig konvergent. Es ist nämlich

$$z^{2n_{\nu-1}-\nu+1}\frac{G_\nu(z)}{q_\nu^\alpha \beta_\nu} = z^{2n_{\nu-1}-\nu+1}\frac{g_{q_\nu}(z)}{q_\nu^\alpha \beta_\nu} = U_\nu(z)$$

ein Polynom vom Grade $2n_{\nu-1} - \nu + 1 + 2q_\nu - 2 = 2n_\nu - \nu - 1$, und nach Hilfssatz 3 ist

$$|U_\nu(z)| \leqq \frac{1}{q_\nu^\alpha \beta_\nu},\quad |z| \leqq 1,\ \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

wobei $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{q_\nu^\alpha \beta_\nu}$ wegen (12′) für jedes $\alpha > 0$ konvergiert.

Die Reihe (13) ist, wenn man die $U_\nu(z)$ ausführlich anschreibt und nicht voneinander trennt, eine Potenzreihe, die für $|z| < 1$ konvergiert und für $|z| \leqq 1$ eine stetige Funktion $G(z)$ darstellt:

$$\begin{aligned}G(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu z^\nu = \frac{C_0^{(q_1)}}{q_1^\alpha \beta_1} + \frac{C_1^{(q_1)}}{q_1^\alpha \beta_1} z + \cdots + \frac{C_{2q_1-2}^{(q_1)}}{q_1^\alpha \beta_1} z^{2q_1-2} \\ + \frac{C_0^{(q_2)}}{q_2^\alpha \beta_2} z^{2q_1-1} + \cdots\end{aligned}$$

Nun ist

$$G(z) - G(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{\infty}[U_\nu(z) - U_\nu(\zeta)],\quad |z| \leqq 1,\quad |\zeta| \leqq 1,$$

und aus Hilfssatz 4 folgt mit Rücksicht auf Ungl. (12)

$$(\mathrm{U})\quad |U_\nu(z) - U_\nu(\zeta)| \leqq 2|z-\zeta|^\varepsilon \frac{(2n_\nu)^\varepsilon}{q_\nu^\alpha \beta_\nu} < \frac{8|z-\zeta|^\varepsilon}{q_\nu^{\alpha-\varepsilon}\beta_\nu},\ \nu = 1, 2, 3, \cdots$$

Da nun für $a > \varepsilon$ die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{q_\nu^{a-\varepsilon} \beta_\nu}$ konvergiert, so genügt die Funktion $G(z)$ für jedes $\varepsilon < a$ einer Lipschitzschen Bedingung vom Grade ε im Kreise $|z| \leq 1$. Ist außerdem $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_\nu}$ eine konvergente Reihe, so genügt $G(z)$ sogar einer Lipschitzschen Bedingung vom Grade a. Hier darf auch $a = 1$ sein. Andererseits ist für $\varkappa > 0$ nach Hilfssatz 3

$$\sum_{\mu=2n_{\nu-1}-\nu+1}^{2n_\nu-\nu-1} |\gamma_\nu|^\varkappa = \left(|C_0^{(q_\nu)}|^\varkappa + \cdots + |C_{2q_\nu-2}^{(q_\nu)}|^\varkappa\right) \frac{1}{q_\nu^{a\varkappa} \beta_\nu^\varkappa}$$

$$= \frac{1}{q_\nu^{a\varkappa+3/2\varkappa} \beta_\nu^\varkappa} [1 + 2^\varkappa + 3^\varkappa + \cdots + (q_\nu - 1)^\varkappa] = S_\nu$$

und

$$1 + 2^\varkappa + \cdots + (q_\nu - 1)^\varkappa > \int_0^{q_\nu - 1} x^\varkappa \, dx = \frac{(q_\nu - 1)^{\varkappa+1}}{\varkappa + 1}, \quad \varkappa > 0.$$

Also ist

$$S_\nu > \frac{(q_\nu - 1)^{\varkappa+1}}{q_\nu^{\varkappa(a+3/2)} \beta_\nu^\varkappa} > \frac{1}{2^{\varkappa+1}} \cdot \frac{q_\nu^{-\varkappa(a+1/2)+1}}{\beta_\nu^\varkappa}, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

setzt man nun

$$\beta_\nu = \log q_\nu, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

so genügt mit Rücksicht auf die Bedingung (12') die Funktion $G(z)$ einer Lipschitzschen Bedingung vom Grade a im Kreise $|z| \leq 1$, während andererseits für

$$1 - \varkappa(a + \tfrac{1}{2}) > 0, \text{ d. h. } \varkappa < \frac{2}{2a+1} \quad \lim_{\nu \to \infty} S_\nu = +\infty$$

wird, also die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\gamma_\nu|^\varkappa$ für jedes $\varkappa < \frac{2}{2a+1}$ divergiert.

Es ist also

$$\gamma(a) \geq \frac{2}{2a+1}, \quad 0 < a \leq 1. \quad \text{Qu. e. d.}$$

Da aber im § 1 gezeigt wurde, daß $\gamma(\alpha) \leqq \frac{2}{2\alpha+1}$ ist, so hat man das Resultat

$$\gamma(\alpha) = \frac{2}{2\alpha+1}, \quad 0<\alpha<1. \tag{14}$$

Offen bleibt dabei die Frage, wie sich die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu|^{\frac{2}{2\alpha+1}}$ verhält. Ich zeige, daß im Falle $\alpha > \frac{1}{2}$ diese Reihe auch noch divergieren kann. Jetzt wird nämlich für $\varkappa = \frac{2}{2\alpha+1} < 1$

$$S_\nu > \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{\beta_\nu}\right)^{\frac{2}{2\alpha+1}}, \qquad \nu = 1, 2, 3 \ldots$$

Nun setze ich

$$\beta_\nu = \nu^{\frac{1}{2}(2\alpha+1)}, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

offenbar ist jetzt $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_\nu}$ konvergent, also genügt $G(z)$ einer Lipschitzschen Bedingung vom Grade α; dagegen ist

$$S_\nu > \frac{1}{4\nu},$$

also $\sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu|^{\frac{2}{2\alpha+1}}$ divergiert. Hierbei ist $0<\alpha \leqq 1$.

Zusammenfassend gilt der Satz II:

Wenn die Funktion

$$f(x) \sim \frac{a_\nu}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

einer Lipschitzschen Bedingung vom Grade α genügt:

$$|f(x) - f(u)| \leqq \lambda |x-u|^\alpha, \text{ wobei } 0<\alpha<1, \tag{3''}$$

so ist die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu - ib_\nu|^\varkappa = \sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu|^\varkappa$ für jedes $\varkappa > \frac{2}{2\alpha+1}$ konvergent; dagegen gibt es eine Funktion $f(x)$, so daß sogar die zugehörige Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu - ib_\nu) z^\nu = G(z)$ der Lipschitzschen Bedingung

$$|G(z) - G(\zeta)| \leq \lambda |z - \zeta|^a, \quad |z| \leq 1, \quad 0 < a \leq 1$$

genügt und die Reihe $\Sigma |c_\nu|^\varkappa$ für jedes $\varkappa < \frac{2}{2a+1}$ divergiert. Ist $a > \frac{1}{2}$, so kann schon die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu|^{\frac{2}{2a+1}}$ divergieren.

Ob z. B. für $a = \frac{1}{2}$ die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu|$ divergieren kann, ist eine offene Frage.

§ 3. Zusätze.

1. Die Formel (14) gilt auch für $a = 1$, denn es ist offenbar

$$\gamma(1) \leq \gamma(a) \text{ für } 0 < a < 1,$$

also

$$\gamma(1) \leq \tfrac{2}{3}.$$

Andererseits folgt aus Satz II

$$\gamma(1) \geq \tfrac{2}{3};$$

also ist

$$\gamma(1) = \tfrac{2}{3}.$$

2. Satz II läßt sich verschärfen durch Untersuchung der Konvergenz bzw. Divergenz der Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^\tau |c_\nu|^\varkappa = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^\tau (a_\nu^2 + b_\nu^2)^{\frac{\varkappa}{2}}, \quad 0 < \varkappa < 2, \quad \tau \geq 0.$$

Man setze in Ungleichung (6)

$$d_\nu = \nu^{\frac{2\tau}{2-\varkappa}}, \quad \delta_\nu = \frac{|c_\nu|^\varkappa}{\nu^{\frac{\varkappa\tau}{2-\varkappa}}}, \quad p = \frac{2}{\varkappa} > 1;$$

dann erhält man

$$\sum_{\nu=n_1}^{n_2} \nu^\tau |c_\nu|^\varkappa \leq \left(\sum_{\nu=n_1}^{n_2} |c_\nu|^2\right)^{\frac{\varkappa}{2}} \left(\sum_{\nu=n_1}^{n_2} \nu^{\frac{2\tau}{2-\varkappa}}\right)^{\frac{2-\varkappa}{2}}$$

$$< \left(\sum_{\nu=n_1}^{\infty} |c_\nu|^2\right)^{\frac{\varkappa}{2}} \left(\sum_{\nu=1}^{n_2} \nu^{\frac{2\tau}{2-\varkappa}}\right)^{\frac{2-\varkappa}{2}}.$$

Nun ist für $\varrho \geqq 0$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^\varrho < \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\nu}^{\nu+1} x^\varrho \, dx = \int_{1}^{n+1} x^\varrho \, dx = \frac{1}{\varrho+1}\left[(n+1)^{\varrho+1} - 1\right],$$

also

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^\varrho < (n+1)^{\varrho+1};$$

hieraus und aus der Formel (8) folgt für

$$n_1 = 2^\mu, \quad n_2 = 2^{\mu+1} - 1, \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots$$

die Ungleichung

$$\sum_{\nu=2^\mu}^{2^{\mu+1}-1} \nu^\tau |c_\nu|^\varkappa < \frac{(2\lambda^2 C^2)^{\frac{\varkappa}{2}}}{2^{\mu a \varkappa}} \cdot 2^{(\mu+1)(2\tau+2-\varkappa)1/2} < \frac{\lambda^\varkappa C^\varkappa}{2^{\mu a \varkappa}} \, 2^{\mu\left(\tau+1-\frac{\varkappa}{2}\right)};$$

also schließlich:

$$\sum_{\nu=2^\mu}^{2^{\mu+1}-1} \nu^\tau |c_\nu|^\varkappa < \frac{\lambda^\varkappa C^\varkappa}{2^{\mu\left(a\varkappa+\frac{\varkappa}{2}-\tau-1\right)}}, \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots$$

Hieraus folgt unmittelbar die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^\tau |c_\nu|^\varkappa = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^\tau (a_\nu^2 + b_\nu^2)^{\frac{\varkappa}{2}},$$

falls

$$\tau \geqq 0, \quad 0 < \varkappa < 2, \quad a\varkappa + \frac{\varkappa}{2} > \tau + 1$$

ist. Dies heißt

$$0 \leqq \tau < \varkappa \frac{2a+1}{2} - 1, \quad 0 < \varkappa < 2;$$

offenbar muß dabei

$$\varkappa > \frac{2}{2a+1}, \quad \text{d. h.} \quad \varkappa > \gamma(a) \quad \text{sein.}$$

3. Eine weitere Verschärfung des Satzes II besteht darin, daß die Bedingung (3″) durch die erheblich allgemeinere

$$(15)\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]^2\,dx \leqq 8\lambda^2 t^{2\alpha} \text{ für } t>0$$

ersetzt wird.

Es kommt ersichtlich nur darauf an, zu zeigen, daß auch unter dieser Voraussetzung die Beziehung (8) gilt, die ihrerseits aus der Ungleichung

$$(16)\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[\sigma_n(x)-f(x)]^2\,dx \leqq \frac{2\lambda^2 C^2}{n^{2\alpha}},\quad n=1,2,3,\ldots$$

(C eine Konstante, die nur von α abhängt) folgt.

Um nun diese Ungleichung zu beweisen, setze ich nach Formel (L)

$$\sigma_n(x)-f(x)=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^{1+\frac{\alpha}{2}}[f(x+2t)$$
$$+f(x-2t)-2f(x)]\,dt,$$

und wende hierauf die bekannte Ungleichung

$$\left(\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx\right)^2 \leqq \int_a^b \varphi(x)^2\,dx\cdot\int_a^b \psi(x)^2\,dx,\quad b>a$$

an. Dann wird

$$(\sigma_n(x)-f(x))^2 \leqq \frac{1}{n^2\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^{2-\alpha}dt\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^{2+\alpha}[f(x+2t)$$
$$+f(x-2t)-2f(x)]^2\,dt;$$

nun ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^{2-\alpha}dt<\frac{\pi^{2-\alpha}}{2^{2-\alpha}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nt}{t}\right)^{2-\alpha}dt<\frac{\pi^2}{4}\int_0^{\infty}\frac{(\sin\tau)^{2-\alpha}\cdot n^{2-\alpha}}{n\tau^{2-\alpha}}\,d\tau$$

$$<\frac{\pi^2}{4}n^{1-\alpha}\left[1+\int_1^{\infty}\frac{d\tau}{\tau^{2-\alpha}}\right]<\frac{\pi^2}{2}\,\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha},\quad 0<\alpha<1,\quad n=1,2,3,\ldots$$

Also wird

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[\sigma_n(x)-f(x)]^2\,dx < \frac{1}{2\pi(1-\alpha)n^{1+\alpha}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^{2+\alpha}\int_0^{2\pi}[f(x+2t)\right.$$
$$\left. + f(x-2t)-2f(x)]^2\,dx\right\}dt,$$

und mit Rücksicht auf die Bedingung (15) wird

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[\sigma_n(x)-f(x)]^2\,dx < \frac{8\lambda^2}{(1-\alpha)n^{1+\alpha}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^{2+\alpha} t^{2\alpha}\,dt.$$

Ferner ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^{2+\alpha} t^{2\alpha}\,dt < \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2+\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin nt)^{2+\alpha}}{t^{2-\alpha}}\,dt$$
$$< \left(\frac{\pi}{2}\right)^3\int_0^{\infty}\frac{(\sin\tau)^{2+\alpha}\cdot n^{2-\alpha}}{n\tau^{2-\alpha}}\,d\tau < 8n^{1-\alpha}\left[1+\int_1^{\infty}\frac{d\tau}{\tau^{2-\alpha}}\right] < 16\,\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Daher wird schließlich

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[\sigma_n(x)-f(x)]^2\,dx < \frac{128\lambda^2}{(1-\alpha)^2 n^{2\alpha}},\quad n=1,2,3,\ldots,$$

womit die Ungleichung (16) bewiesen ist $\left(C=\frac{8}{1-\alpha}\text{ gesetzt}\right)$.

Es ist bemerkenswert, daß die Bedingung (15) sich durch die Fouriersche Reihe von $f(x)$ leicht ausdrücken läßt. Es ist nämlich

$$f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x) \sim -2\sum_{\nu=1}^{\infty}(1-\cos 2\nu t)(a_\nu\cos\nu x$$
$$+ b_\nu\sin\nu x),\quad 1-\cos 2\nu t = 2\sin^2\nu t,$$

also

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]^2\,dx = 16\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu^2+b_\nu^2)\sin^4\nu t.$$

Wir haben somit den, auch direkt beweisbaren, Satz gewonnen: Satz III.

Ist für ein positives $\alpha < 1$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2) \sin^4 \nu t \leqq \lambda^2 t^{2\alpha} \quad \text{für } t > 0,$$

λ eine Konstante,

so ist die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2)^{\frac{\varkappa}{2}}$ für $\varkappa > \frac{2}{2\alpha+1}$ konvergent.

Ich beweise, daß es andererseits Funktionen $f(x)$ gibt, für die sogar

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2) \sin^2 \nu t \leqq \lambda^2 t^{2\alpha}, \quad t > 0$$

gilt, während $\sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2)^{\frac{1}{2\alpha+1}}$ divergiert; dabei ist α eine Zahl des Intervalles $0 < \alpha \leqq 1$.

Setzt man nämlich für die in § 2 definierte Funktion $G(z)$ wiederum

$$\beta_\nu = \nu^{\alpha + 1/2}, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

so ist, wie schon gezeigt wurde, $\sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2)^{\frac{1}{2\alpha+1}}$ divergent. Andererseits ist $G(z)$ eine für $|z| \leqq 1$ stetige Funktion und da in den Polynomen $U_\nu(z)$ keine gemeinsame Potenz von z vorkommt, wird

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |G(e^{i(x+2t)}) - G(e^{ix})|^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} |U_\nu(e^{i(x+2t)}) - U_\nu(e^{ix})|^2 \, dx.$$

Nun ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} (\gamma_\nu e^{i\nu(x+2t)} - \gamma_\nu e^{i\nu x}) \right|^2 dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} |\gamma_\nu|^2 \, |1 - e^{2i\nu t}|^2$$

$$= 4 \sum_{\nu=1}^{\infty} |\gamma_\nu|^2 \sin^2 \nu t,$$

und aus der Ungleichung (U) folgt für $\varepsilon = \alpha$

$$|U_\nu(e^{i(x+2t)}) - U_\nu(e^{ix})|^2 \leq \frac{8^2 |1 - e^{2it}|^{2\alpha}}{\nu^{2\alpha+1}},$$

also

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} |U_\nu(e^{i(x+2t)}) - U_\nu(e^{ix})|^2 \, dx \leq 8^2 \, 4^\alpha \sin^{2\alpha} t \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2\alpha+1}}.$$

Somit wird

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\gamma_\nu|^2 \sin^2 \nu t \leq 8^2 t^{2\alpha} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2\alpha+1}}. \quad \text{Qu. e. d.}$$

Schlußbemerkung.

Aus unserem Resultat folgt insbesondere:

Genügt die Funktion $f(x)$ für ein $\alpha > \frac{1}{2}$ der Bedingung (15), so ist sie durchweg stetig.

Es wäre von Interesse, hierfür einen direkten Beweis zu geben.

Bemerkungen zu einem Satze über die Riemannsche ζ-Funktion.

Von **Hans Hamburger** (Berlin).

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 6. Mai 1922.

An anderer Stelle[1]) wurde der Satz bewiesen: *Es sei $f(s)$ gleich einer ganzen Funktion von endlichem Geschlecht dividiert durch ein Polynom; wenn außerdem*

1. *$f(s)$ für $\Re(s) > 1$ durch eine absolut konvergente Dirichletsche Reihe vom Typus* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$,

2. *die Funktion*

$$g(1-s) = \pi^{\frac{1}{2}-s} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} f(s) \tag{1}$$

für $\Re(s) < -a$ $(a \geq 0)$ durch eine absolut konvergente Reihe vom Typus $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{1-s}}$ *dargestellt wird, so ist $f(s) = \text{konst.}\, \zeta(s)$.*

(Verlangt man statt **2.** die schärfere Bedingung

$$g(1-s) = f(1-s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1-s}}, \tag{2'}$$

so besagt **2'.** nichts anders, als daß $f(s)$ der Riemannschen Funktionalgleichung genügen möge.)

---

1) H. Hamburger, Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion (erste Mitteilung). Math. Zeitschr. **10**, S. 240—254 (1921). Im folgenden kurz mit I zitiert.

Einen neuen außerordentlich kurzen und eleganten Beweis dieses Satzes hat kürzlich Herr Siegel[1]) angegeben; wenn trotzdem in der folgenden Note noch einmal auf den ursprünglichen Beweis des Satzes (l. c., Fußnote [1]), S. 151) eingegangen wird, so besteht die Absicht, zu zeigen, daß auch dieser Beweis rasch zum Ziele führt, wenn man darauf verzichtet, die dort angegebenen Hilfssätze 1 und 2 (vgl. I, S. 242—245) zu benutzen. Diese Hilfssätze sind damals teils wegen ihres selbständigen Interesses herangezogen worden, teils um einen neuen Beweis dafür herzuleiten, daß die Funktion $\zeta(s)$ der Riemannschen Funktionalgleichung genügt (I, S. 253—254).

Dem Beweis schicken wir zwei einfache Integralformeln voraus.

Hilfssatz 1: Es ist[2])

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\frac{3}{4}-\infty i}^{-\frac{3}{4}+\infty i}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}x^{-s}\,ds=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(\cos 2x-1).$$

Beweis: Wie man leicht einsieht, ist das Integral linker Hand nach dem Cauchyschen Integralsatz gleich der Summe der Residuen der Funktion

$$x^{-s}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}\,(2x)^{-s}}{\Gamma(1-s)\sin\frac{\pi s}{2}}$$

---

[1]) C. Siegel, Bemerkung zu einem Satz von Hamburger über die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion. Math. Ann. 86 (1922), S. 276—279. Vgl. auch ebenda 85 (1922), S. 129—140 eine Note des Verfassers „Über einige Beziehungen, die mit der Funktionalgleichung der Riemannschen ζ-Funktion äquivalent sind", die bereits den Hauptgedanken des Siegelschen Beweises enthält. Beide Noten sind völlig unabhängig voneinander entstanden.

[2]) Ähnliche Integrale betrachtet Herr E. Landau in seiner Arbeit: Zur analytischen Zahlentheorie der definiten quadratischen Formen (Über die Gitterpunkte in einem mehrdimensionalen Ellipsoid). Sitzgsb. d. Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss. 31 (1915), S. 458—476. Vgl. insbesondere S. 468—469. — Die Formel des Hilfssatzes ist nichts anderes als die Integralumkehrung der Formel (9) des Hilfssatzes 3 aus I, S. 246—247.

in der Halbebene $\Re(s) < -\frac{3}{4}$; mithin ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\frac{3}{4}-\infty i}^{-\frac{3}{4}-\infty i} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(\cos 2x - 1).$$

W. z. b. w.

Hilfssatz 2:[1]) Es ist für $\beta > 0$ und positive y

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-s-\infty i}^{-s+\infty i}\frac{y^s}{(s-1)(s-2)}\,ds = \begin{cases} 0 & \text{für } y > 1 \\ y - y^2 & \text{für } y < 1. \end{cases}$$

Beweis: Diese Formel ist mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes unmittelbar zu verifizieren.

Beweis des Hauptsatzes: Man setze, indem man (1) benutzt (vgl. I, S. 248, Formel (17))

$$(2)\qquad G(s) = \frac{-4\pi^2}{(s-2)(s-1)}\,g(1-s) = \pi^{\frac{5}{2}-s}\,\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{3-s}{2}\right)}\,f(s).$$

Aus der Relation

$$\lim_{t=\infty}\frac{|\Gamma(\sigma+it)|}{e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\,|t|^{\sigma-\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi}$$

folgt nach geeigneter Wahl positiver Konstanten T, C, C' für $\Re(s) = \frac{5}{4}$, $|t| \geq T$

$$(3)\qquad \left|\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{3-s}{2}\right)}\right| < C\,|t|^{-\frac{5}{4}},\quad |G(s)| < C'\,|t|^{-\frac{5}{4}}.$$

Andererseits findet man für $\Re(s) = -\beta$, $(\beta > \alpha)$, da wegen der Voraussetzung **2.** die Funktion $g(1-s)$ auf der Geraden $\sigma = -\beta$ beschränkt bleibt

$$(4)\qquad |G(s)| \leq C''\,|t|^{-2}.$$

[1]) Vgl. E. Landau, l. c., Fußnote 3), S. 467.

Endlich ist nach Voraussetzung $f(s)$ und damit auch $G(s)$ im Streifen $-\beta \leqq \Re(s) \leqq \frac{5}{4}$ bis auf endlich viele Pole regulär; folglich ergibt sich aus einem oft angewandten funktionentheoretischen Hilfssatze von Phragmén-Lindelöf[1]) — der gestattet, von der Größenordnung einer analytischen Funktion auf dem Rande eines Bereiches auf ihre Größenordnung im Innern zu schließen — wegen (3) und (4) die Existenz zweier positiver Konstanten T' und C''', derart, daß in dem ganzen Bereiche $-\beta \leqq \Re(s) \leqq \frac{5}{4}$, $|t| \geqq T'$

$$|G(s)| \leqq C''' |t|^{-\frac{5}{4}} \text{ ist.} \tag{5}$$

Bezeichnet x eine positive Zahl, so bilde man das Integral

$$J(x) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\frac{5}{4}-\infty i}^{\frac{5}{4}+\infty i} G(s)\, x^{-s+2}\, ds - \int\limits_{-\beta+\infty i}^{-\beta-\infty i} G(s)\, x^{-s+2}\, ds\right); \tag{6}$$

dann läßt sich wegen (5) $J(x)$ als ein Integral über den Rand des Streifens $-\beta \leqq \Re(s) \leqq \frac{5}{4}$ auffassen, und es ergibt sich nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$J(x) = R(x), \tag{7}$$

unter $R(x)$ die Summe der Residuen von $G(s)$ an den endlich vielen Polen im Innern des Streifens verstanden; mithin ist

$$R(x) = \sum_{\nu=1}^{m} x^{-s_\nu+2} P_\nu(\log x), \tag{8}$$

wenn $s_1, s_2, \ldots, s_\nu, \ldots, s_m$ die Pole von $G(s)$ im betrachteten Streifen, $P_1, \ldots, P_\nu, \ldots, P_m$ Polynome in $\log x$ bezeichnen.

Setzt man, indem man für $G(s)$ Formel (2) benutzt (vgl. I, S. 249, Formel (19))

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{5}{4}-\infty i}^{\frac{5}{4}+\infty i} G(s)\, x^{-s+2}\, ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi i}\int\limits_{\frac{5}{4}-\infty i}^{\frac{5}{4}+\infty i} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{3-s}{2}\right)} f(s)\, (\pi x)^{-s+2}\, ds,$$

[1]) E. Phragmén und E. Lindelöf, Sur une extension d'un principe classique de l'analyse, Acta Math. 31 (1908), S. 381—406, insb. S. 385.

so ergibt sich, wenn man für $f(s)$ die Dirichletsche Reihe aus Voraussetzung 1. einsetzt und wegen der absoluten Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s}$ für $\Re(s) = \frac{5}{4}$, die Reihenfolge von Summation und Integration vertauscht

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} \int_{\frac{5}{4}-\infty i}^{\frac{5}{4}+\infty i} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{3-s}{2}\right)} (\pi n x)^{-s+2} \, ds$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} \int_{-\frac{3}{4}-\infty i}^{-\frac{3}{4}+\infty i} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} (\pi n x)^{-s} \, ds$$

$$(9) \qquad = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} (\cos 2\pi n x - 1) \qquad \text{(nach Hilfssatz 1).}$$

Substituiert man andererseits in das Integral

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\beta-\infty i}^{-\beta+\infty i} G(s) x^{-s+2} \, ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\beta-\infty i}^{-\beta+\infty i} \frac{-4\pi^2}{(s-2)(s-1)} g(1-s) x^{-s+2} \, ds$$

für $g(1-s)$ die Dirichletsche Reihe aus Voraussetzung 2. und integriert dann gliedweise, so folgt aus Hilfssatz 2

$$\psi(x) = -4\pi^2 x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\beta-\infty i}^{-\beta+\infty i} \frac{\left(\frac{n}{x}\right)^s}{(s-2)(s-1)} \, ds$$

$$(10) \qquad = -4\pi^2 \sum_{n=1}^{m} b_n (x-n) \qquad (m+1 \leq x < m).$$

Wegen (6) und (7) ist

$$(11) \qquad \varphi(x) - \psi(x) = R(x).$$

$\varphi(x)$ ist aber, wie aus (9) hervorgeht, eine periodische Funktion mit der Periode 1. Mithin ergibt sich aus (11) und (10)

$$(12) \qquad R(x+1) - R(x) = \psi(x) - \psi(x+1)$$
$$= 4\pi^2 \left(b_{m+1}(x-m) + \sum_{n=1}^{m} b_n \right) \qquad (\text{für } m < x \leq m+1).$$

Formel (8) läßt erkennen, daß $R(x+1) - R(x)$ für $x > 0$ einen stetigen Differentialquotienten erster Ordnung hat; damit dasselbe nun aber auch für die rechte Seite von (12) gilt, ist notwendig, daß alle Koeffizienten b_{m+1} gleich einer festen Konstanten b sind. Mithin ist

$$g(1-s) = b\,\zeta(1-s).$$

Setzt man diesen Wert für $g(1-s)$ in die Formel (1) ein, so folgt aus der Riemannschen Funktionalgleichung auch

$$f(s) = b\,\zeta(s).$$

W. z. b. w.

Über nach Polynomen fortschreitende Reihen.

Von **Georg Faber.**

Vorgelegt in der Sitzung am 17. Juni 1922.

Vor einiger Zeit habe ich mich, ohne meine damaligen Ergebnisse zu veröffentlichen, mit der Darstellbarkeit analytischer Funktionen durch Reihen beschäftigt, die nach den Näherungsnennern

$$1)\quad Q_\nu(x) = x^\nu + a_{\nu-1}^{(\nu)} x^{\nu-1} + \cdots a_0^{(\nu)} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots);$$
(Koeffizient von x^ν in $Q_\nu(x)$ gleich 1)

des Kettenbruchs

$$2)\quad \int_{-1}^{+1} \frac{p(z)\,dz}{z-x} \qquad (p(x) \geq 0;\ -1 \leq x \leq 1)$$

fortschreiten. Inzwischen hat Herr Szegö die gleiche Frage gelöst und als Haupt- und Endergebnis mehrerer umfangreicher Abhandlungen folgenden Satz (mit gewissen einschränkenden Voraussetzungen über die nie negative Funktion $p(x)$) bewiesen (Math. Ann. 82 (1921), S. 193):

Jede auf der Strecke $-1, +1$ reguläre analytische Funktion $F(x)$ läßt sich in eine Reihe

$$3)\quad F(x) = \sum_0^\infty{}^\nu\, a_\nu\, Q_\nu(x)$$

entwickeln; diese konvergiert innerhalb der Ellipse mit den Brennpunkten $-1, +1$, die keinen singulären Punkt von $F(x)$ in ihrem Innern, wohl aber mindestens

einen auf ihrem Rande hat. Außerhalb dieser Ellipse divergiert die Reihe (3). Die Koeffizienten a_ν ergeben sich in Anbetracht der Orthogonalitätsbeziehungen

$$4) \qquad \int_{-1}^{+1} Q_\mu(x)\, Q_\nu(x)\, p(x)\, dx = 0 \quad \text{für } \mu \neq \nu$$

durch die Formeln

$$5) \qquad a_\nu = \frac{1}{k_\nu^2} \int_{-1}^{+1} F(x)\, Q_\nu(x)\, p(x)\, dx, \quad \text{wo}$$

$$6) \qquad k_\nu^2 = \int_{-1}^{+1} Q_\nu^2(x)\, p(x)\, dx.$$

Falls die Summe der Halbachsen der obigen Ellipse $= R$ ist (ich nenne sie künftig die Ellipse R), gilt

$$7) \qquad \lim_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu k_\nu|} = \frac{1}{R}.$$

Da sich neuerdings die Mathematiker in erhöhtem Maße mit der Darstellung analytischer Funktionen durch polynomische Reihen beschäftigt haben, interessiert es vielleicht, wenn ich im folgenden meinen überaus einfachen Beweis des obigen Satzes mitteile und dann im Zusammenhang damit auf einige Fragen eingehe, die in anderer Richtung liegen, als die sonstigen bemerkenswerten Ergebnisse, die Herr Szegö auf seinem Wege gefunden hat.

§ 1. Beweis des Hauptsatzes.

Ich mache vorerst die den Beweis ein wenig vereinfachende und hinterher leicht zu beseitigende Voraussetzung, daß $p(x)$ oberhalb einer endlichen Grenze $g > 0$ bleibt:

$$8) \qquad p(x) > g > 0 \qquad (-1 \leq x \leq 1).$$

Mit g, g', g'', G, G', ... bezeichne ich stets endliche positive Konstante, mit ε_ν, ε_ν', ε_ν'', ... positive Zahlen, die mit $1/\nu$ gegen Null konvergieren, endlich mit g_ν, g_ν', g_ν'', G_ν, G_ν', ...

positive Zahlen, deren positive ν^{te} Wurzeln mit unendlich wachsendem ν gegen 1 konvergieren. Ferner sei

$$9)\qquad P_\nu(x) = \frac{1}{2^{\nu-1}} \arccos \cos x = x^\nu + \cdots,$$

es ist also

$$10)\qquad P_\nu(\cos\vartheta) = \frac{1}{2^{\nu-1}} \cos \nu\vartheta .$$

$$11)\qquad L_\nu(x) = x^\nu + \cdots \text{ sei das mit } \frac{2^\nu(\nu!)^2}{(2\nu)!}$$

multiplizierte Legendresche Polynom ν^{ter} Ordnung.

Dann ist

$$12)\qquad \begin{aligned} k_\nu^2 &= \int_{-1}^{+1} p(x)\, Q_\nu^2(x)\, dx > g \int_{-1}^{+1} Q_\nu^2(x)\, dx > g \int_{-1}^{+1} L_\nu^2(x)\, dx \\ &= \frac{2}{2\nu+1}\left[\frac{2^\nu(\nu!)^2}{(2\nu)!}\right]^2 > \frac{g'}{2^{2\nu}}; \end{aligned}$$

$$13)\qquad k_\nu^2 \leqq \int_{-1}^{+1} p(x)\, P_\nu^2(x)\, dx < \frac{1}{2^{2\nu-2}} \int_{-1}^{+1} p(x)\, dx < \frac{G}{2^{2\nu}}.$$

Aus (12), (13) folgt

$$14)\qquad \lim_{\nu\to\infty} |k_\nu|^{\frac{1}{\nu}} = \tfrac{1}{2}.$$

Ferner ist

$$15)\qquad \int_{-1}^{+1} Q_\nu^2(x)\, dx < \frac{1}{g}\int_{-1}^{+1} p(x)\, Q_\nu^2(x)\, dx < \frac{G}{g\, 2^{2\nu}} \quad \text{(s. (13)).}$$

Um so mehr ist

$$16)\qquad \int_{-1}^{x} Q_\nu^2(x)\, dx < \frac{G}{g\, 2^{2\nu}}, \quad \text{falls } -1 \leqq x \leqq +1,$$

und daher

$$17)\qquad Q_\nu^2(x) < \frac{G_\nu}{2^{2\nu}}\,^{1)} \quad (-1 \leq x < 1),$$

$$18)\qquad \frac{1}{\nu} \lg |Q_\nu(x)| < G\tfrac{1}{2} + \varepsilon_\nu.$$

Nun beachte man: wenn $x = \xi + i\eta$ gesetzt wird und $\sqrt{x^2-1}$ durch die Bedingung

$$19)\qquad \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-1} : x = +1$$

in der Umgebung des Punktes ∞ eindeutig gemacht wird, so ist das logarithmische Potential

---

[1] Ist nämlich ein Polynom ν^{ten} Grades $\omega(x)$ in irgend einem Intervall J: $b-a$, $b+a$ der Länge $2a$ dem Betrage nach $< G$, so ist in J: $\omega'(x) < 4aG\nu^2$. Durch die Substitutionen $\xi = (x-b) : 2a = \cos\vartheta$ möge $\omega(x)$ in $\chi(\xi)$ und $\varphi(\vartheta)$ übergehen; dann kann man $\varphi(\vartheta) = {}^1/_2\, b_0 + b_1 \cos\vartheta + \cdots + b_\nu \cos\nu\vartheta$ setzen, wo $|b_\mu| = \left|\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \varphi(\vartheta)\cos\mu\vartheta\, d\vartheta\right| < 2G$ ist. Da $\omega'(x) = -2a\varphi'(\vartheta) : \sin\vartheta$ ist, ergibt sich

$$|\omega'(x)| < 2a\sum_0^\nu{}^\mu |b_\mu| \left|\frac{\sin\mu\vartheta}{\sin\vartheta}\right| < 4aG\nu^2, \text{ w. z. b. w.}$$

Im Hinblick auf Späteres möge hier noch der Beweis des folgenden Satzes angefügt werden:

In dem vergrößerten Intervall J': $b-a(1+\varepsilon)$, $b+a(1+\varepsilon)$, wo $\varepsilon > 0$, ist $|\omega(x)| < 2G(1+3\sqrt{\varepsilon})^\nu(\nu+1)$. Ich beweise etwas allgemeiner: Die Funktion $|\chi(\xi)|$ ist auf der Ellipse mit den Brennpunkten $+1$, -1, die durch die Punkte $\pm(1+\varepsilon)$ hindurchgeht, $< 2G(1+3\sqrt{\varepsilon})^\nu$ $(\nu+1)$. Auf dieser Ellipse, deren Halbachsensumme $= R$ sein möge, ist nämlich $|\cos\mu \arccos\xi| = \frac{1}{2}|(\xi+\sqrt{\xi^2-1})^\mu + (\xi-\sqrt{\xi^2-1})^\mu| \leq \frac{1}{2}(R^\mu + R^{-\mu}) < R^\mu$. Nun ist offenbar $R < 1+3\sqrt{\varepsilon}$, also $|\chi(\xi)|$ in J' kleiner als $2G\sum_0^\nu{}^\mu (1+3\sqrt{\varepsilon})^\mu < 2G(\nu+1)(1+3\sqrt{\varepsilon})^\nu$.

Die in dieser Fußnote abgeleiteten Abschätzungen können leicht durch viel genauere ersetzt werden; vgl. den Satz III auf S. 170 und insbesondere die in der Fußnote daselbst angeführte Abhandlung des Herrn S. Bernstein; vgl. a. M. Riesz, acta math., Bd. 40 (1916), S. 337; M. Fékéte, Journal f. d. reine u. angewandte Math., Bd. 146 (1916), S. 88.

20) $$u(\xi, \eta) = \lg \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{2} \right| \quad \text{konstant} = \lg \frac{R}{2}$$

auf jeder Ellipse $R > 1$; und dies gilt auch noch für die zur Strecke $-1, +1$ ausgeartete Ellipse $R = 1$.

Die logarithmischen Potentiale

21) $$w_\nu(\xi, \eta) = \frac{1}{\nu} \lg |Q_\nu(\xi + i\eta)| - u(\xi, \eta)$$

sind für jedes ν in der längs der Strecke $-1, +1$ aufgeschnittenen Ebene E' eindeutig und regulär (weil ja die Nullstellen aller Polynome $Q_\nu(x)$ auf dieser Strecke liegen); im Unendlichen nehmen sie alle den Wert

22) $$w_\nu(x) = 0$$

an. Nach (18), (20) ist der Maximalwert, den $w_\nu(\xi, \eta)$ auf der Strecke $-1, +1$ annimmt, $< \varepsilon_\nu$; um so mehr ist überall in E':

23) $$w_\nu(\xi, \eta) < \varepsilon_\nu.$$

Aus (22), (23) schließt man leicht

24) $$\lim_{\nu \to \infty} w_\nu(\xi, \eta) = 0 \text{ für alle Punkte } \xi, \eta \text{ in } E',$$

oder

25) $$\lim_{\nu \to \infty} \frac{1}{\nu} \lg |Q_\nu(x)| = \lg \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{2} \right|.$$

Um (24) zu beweisen, denke man sich das Gebiet E' auf das Kreisgebiet $r < 1$ (r Abstand vom Nullpunkte) konform abgebildet der Art, daß dem Punkte $x = \infty$ der Punkt $r = 0$ entspricht. Jedem Punkte mit den Polarkoordinaten r, φ in diesem Kreisgebiet ordne man den nämlichen Potentialwert $w_\nu(r, \varphi) = w_\nu(\xi, \eta)$[1]) zu, der zu dem entsprechenden Punkte $x = \xi + i\eta$ in E' gehörte. Die Funktion $\overset{+}{w_\nu}(\psi)$ sei mit der Randfunktion $w_\nu(1, \psi)$ $(0 < \psi < 2\pi)$ identisch da, wo diese

[1]) Wegen der numerischen Übereinstimmung in entsprechenden Punkten sei es erlaubt, zwei verschiedene Funktionen mit dem nämlichen Buchstaben w_ν zu bezeichnen, wie es ja in Physik und Mechanik üblich ist.

$\geqq 0$ ist, sonst sei $w_\nu^+(\psi) = 0$; die ganz entsprechend gebildete nirgends positive Funktion $w_\nu^-(\psi)$ kann dann als durch die Identität

$$w_\nu^+(\psi) + w_\nu^-(\psi) = w_1(1, \psi) \tag{26}$$

erklärt angesehen werden; daß $w_\nu^-(\psi)$ für gewisse Werte ψ gleich $-\infty$ wird, ist für das folgende nicht störend. Nach (23) ist

$$w_\nu^+(\psi) < \varepsilon_\nu \text{ und also } 0 \leqq \int_0^{2\pi} w_\nu^+(\psi)\, d\psi < 2\pi\varepsilon_\nu. \tag{27}$$

Da ferner $w_\nu(r, \varphi)$ für $r = 0$ wegen (22) $= 0$ ist, hat man

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (w_\nu^+(\psi) + w_\nu^-(\psi))\, d\psi = 0, \tag{28}$$

also wegen (27):

$$0 \geqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w_\nu^-(\psi)\, d\psi > -\varepsilon_\nu. \tag{29}$$

Für irgend einen Punkt r, φ des Kreisgebietes $r < 1$ ist nach dem Poissonschen Integralsatze

$$w_\nu(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(w_\nu^+(\psi) + w_\nu^-(\psi))(1 - r^2)}{1 - 2r\cos(\psi - \varphi) + r^2}\, d\psi \tag{30}$$

$$> \frac{1 - r^2}{(1 + r)^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w_\nu^+(\psi)\, d\psi + \frac{(1 - r^2)}{(1 - r)^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w_\nu^-(\psi)\, d\psi$$

$$> \frac{1 + r}{1 - r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w_\nu^-(\psi)\, d\psi > -\varepsilon_\nu\frac{1 + r}{1 - r} \text{ (nach (29)).}$$

Dagegen ist wegen (23):

$$w_\nu(r, \varphi) < \varepsilon_\nu. \tag{31}$$

Aus (30), (31) ergibt sich

$$\lim_{\nu \to \infty} w_\nu(r, \varphi) = \lim_{\nu \to \infty} w_\nu(\xi, \eta) = 0, \text{ w. z. b. w.} \tag{32}$$

Aus (20) und (25) folgt nun weiter

$$33) \qquad \lim_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{Q_\nu(x)} = \frac{R}{2}$$

für alle Punkte der Ellipse R.

Daher konvergiert, wenn

$$34) \qquad \lim_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \frac{2}{R} \quad (< 2)$$

ist (was wegen (14) mit (7) gleichbedeutend ist) die Reihe

$$35) \qquad \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu Q_\nu(x)$$

gleichmäßig in jedem Gebiet, das ganz innerhalb der Ellipse R liegt, während außerhalb dieser Ellipse Divergenz stattfindet.

Umgekehrt sei eine analytische Funktion $F(x)$ vorgelegt, die im Innern der Ellipse R (> 1) regulär und eindeutig sei, auf dieser aber mindestens eine singuläre Stelle besitze; und es soll gezeigt werden, daß $F(x)$ durch eine im Innern der Ellipse R konvergente Reihe der Form (35) dargestellt werden kann, und zwar mit eindeutig bestimmten Koeffizienten

$$36) \qquad a_\nu = \frac{1}{k_\nu^2} \int_{-1}^{+1} F(x)\, Q_\nu(x)\, p(x)\, dx.$$

Zum Beweise gehe man davon aus, daß bekanntlich $F(x)$ im Innern der Ellipse R durch eine Reihe

$$37) \qquad F(x) = \sum_0^\infty {}^\nu b_\nu P_\nu(x)$$

dargestellt werden kann (vgl. (9), (10)) mit

$$38) \qquad \overline{\lim_{\nu \to \infty}} \, |\sqrt[\nu]{b_\nu}| = \frac{2}{R} \text{ [1]} \quad (R > 1).$$

---

[1] Aus der Darstellung (38) folgt nebenbei noch folgendes: Ist $F(x)$ eine im Intervall $-1, +1$ gegebene Funktion und $\Pi_\nu(x)$ des Polynoms ν^{ten} Grades, für das das Maximum der Differenz $|F(x) - \Pi_\nu(x)|$ möglichst klein $(= \vartheta_\nu^\nu)$ ausfällt, so ist $\lim\limits_{\nu \to \infty} \vartheta_\nu$ dann und nur dann $= \frac{1}{R} < 1$,

Bildet man für diese Funktion (37) die Koeffizienten a_ν (36), so erhält man

39) $$a_\mu = \frac{1}{k_\mu^2} \sum_\mu^\infty{}^\nu b_\nu \int_{-1}^{+1} P_\nu(x)\, Q_\mu(x)\, p(x)\, dx,$$

40) $$|a_\mu| < (2+\varepsilon_\mu)^{2\mu} \sum_\mu^\infty{}^\nu \frac{(2+\varepsilon_\nu)^\nu}{R^\nu} \frac{G'}{2^\nu \cdot 2^\mu} \int_{-1}^{+1} p(x)\, dx$$
$$< \left(\frac{2}{R}\right)^\mu \cdot G'_\mu, \text{ also}$$

41) $$\overline{\lim_{\mu\to\infty}} \sqrt[\mu]{|a_\mu|} \leq \frac{2}{R}.$$

Die mit diesen Koeffizienten gebildete Reihe (35) konvergiert somit im Innern der Ellipse R; es ist leicht zu zeigen, daß sie auch die gegebene Funktion $F(x)$ darstellt, woraus dann ohne weiteres folgt, daß in (41) das Zeichen $=$, nicht $<$ gilt. Jedenfalls stellt die Reihe (35) eine im Innern der Ellipse R reguläre analytische Funktion $\Phi(x)$ dar, die also in eine Reihe

42) $$\Phi(x) = \sum_0^\infty{}^\nu B_\nu P_\nu(x)$$

entwickelbar ist, wo für $n = 0, 1, 2, \ldots$:

43) $$B_n = \frac{2^{2n-2}}{\pi} \sum_n^\infty{}^\mu a_\mu \int_{-1}^{+1} Q_\mu(x)\, P_n(x)$$

$$= \frac{2^{2n-2}}{\pi} \sum_n^\infty{}^\mu \sum_\mu^\infty{}^\nu \frac{1}{k_\mu^2} b_\nu \int_{-1}^{+1} P_\nu(x) Q_\mu(x) p(x) dx \int_{-1}^{+1} Q_\mu(x) P_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

(vgl. (39)).

---

wenn $F(x)$ innerhalb der Ellipse R regulär ist, auf dieser aber mindestens eine singuläre Stelle besitzt. Dagegen gilt nur $\lim_{\nu\to\infty} \nu^k \vartheta_\nu^\nu = 0$ für jedes $k > 0$, falls $F(x)$ auf der Strecke $-1, +1$ überall unendlich oft differenzierbar ist. Wenn also z. B. $x = \cos\vartheta$, $F(x) = \sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{B_\nu^{m_\nu}} \cos B_\nu \vartheta$ gesetzt wird, wo B_1 ganzzahlig, $B_{\nu+1} : B_\nu$ ganzzahlig > 1, $\lim_{\nu\to\infty} m_\nu = \infty$, $\lim_{\nu\to\infty} (m_\nu \lg B_\nu) : B_\nu = 0$, so ist $F(x)$ an jeder Stelle der Strecke $-1, +1$ unbeschränkt differenzierbar, an keiner regulär analytisch.

Daß die hier rechts stehende Doppelreihe absolut konvergiert, ist ohne weiteres ersichtlich (vgl. (17)).

Der zu führende Beweis der Identität $\Phi(x) = F(x)$ wird erbracht sein, wenn gezeigt ist, daß aus (43)

$$B_n = b_n \tag{44}$$

folgt. Nun sind aber offenbar in den Darstellungen

$$P_\nu(x) = \sum_0^\nu {}^\mu \beta_\mu^{(\nu)} Q_\mu(x), \tag{45}$$

$$Q_\mu(x) = \sum_0^\mu {}^n \alpha_n^{(\mu)} P_n(x) \tag{46}$$

die Koeffizienten

$$\beta_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{k_\mu^2} \int_{-1}^{+1} P_\nu(x)\, Q_\mu(x)\, p(x)\, dx, \tag{47}$$

$$\alpha_n^{(\mu)} = \frac{2^{2n-2}}{\pi} \int_{-1}^{+1} Q_\mu(x)\, P_n(x) \frac{dx}{|\sqrt{1-x^2}|} \tag{48}$$

eindeutig bestimmt; durch Einsetzen von (46) in (45) ergeben sich daher die Identitäten:

$$\alpha_\nu^{(\nu)} \beta_\nu^{(\nu)} = 1, \quad \sum_n^\nu {}^\mu \alpha_n^{(\mu)} \beta_\mu^{(\nu)} = 0, \text{ falls } \nu > n. \tag{49}$$

Mit Benutzung von (47), (48) läßt sich (43) so schreiben:

$$B_n = \sum_n^\infty {}^\nu \left(b_\nu \sum_n^\nu {}^\mu \alpha_n^{(\mu)} \beta_\mu^{(\nu)} \right); \tag{50}$$

es ist also wegen (49)

$$B_n = b_n \; (n = 0, 1, 2, \ldots), \text{ w. z. b. w.} \tag{51}$$

Daß die so bewiesene Darstellung der gegebenen Funktion $F(x)$ durch eine auf der Strecke $-1, +1$ gleichmäßig konvergente Reihe der Form (35) nur auf eine Weise, nämlich mit den Koeffizienten (36) möglich ist, leuchtet unmittelbar ein, denn aus

52) $$F(x) = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} a'_\nu Q_\nu(x)$$

folgt durch gliedweise Integration nach Multiplikation mit $p(x)$:

53) $$a'_\nu = \frac{1}{k_\nu^2} \int_{-1}^{+1} F(x) Q_\nu(x) p(x) dx = a_\nu.$$

Dagegen würde es zweifellos, genau wie bei den Fourierschen Reihen, eines weiteren Ausholens bedürfen, wenn man beweisen wollte, daß überhaupt keine zweite Darstellung (52) der Funktion $F(x)$ möglich wäre, auch keine ungleichmäßig konvergente oder in einzelnen Punkten versagende; von vornherein ist klar, daß eine solche zweite Darstellung jedenfalls für keinen Punkt außerhalb der Strecke $-1, +1$ konvergieren könnte.

§ 2. Ergänzungen. Abschätzung von Polynomen.

Die bisherige Voraussetzung $p(x) > g$ möge nun durch folgende ersetzt werden:

Außerhalb einer endlichen Anzahl m von Intervallen der Gesamtlänge ε_ν sei

54) $$p(x) > g_\nu$$

($\lim\limits_{\nu \to \infty} \varepsilon_\nu = 0$, $\lim\limits_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{g_\nu} = 1$; es würde übrigens keine Erschwerung des Beweises bedeuten, wenn man m durch m_ν mit $\lim\limits_{\nu \to \infty} m_\nu = \infty$ ersetzen wollte).

Bei dem folgenden Beweise dürfen und wollen wir der Einfachheit halber $m = 1$ voraussetzen; i_ν sei dann das Intervall der Länge ε_ν, J_ν der Rest der Strecke $-1, +1$. Für J_ν gibt es ein Tschebyscheffsches Polynom ν^{ter} Ordnung

55) $$T_\nu(x) = x^\nu + \cdots,$$

dessen Maximalbetrag in J_ν möglichst klein $= \vartheta_\nu^\nu$ ist. J_ν kann aus einem oder aus zwei Intervallen bestehen. Im ersteren Falle ist

56) $$\vartheta_\nu^\nu = 2\left(\frac{2-\varepsilon_\nu}{4}\right)^\nu.$$

Es ergibt sich dies sofort daraus, daß die Strecke J_ν durch die Substitution von const. $+ x:(2-\varepsilon_\nu)$ an Stelle von x aus der Strecke $-1, +1$ entsteht, und daß für die zur Strecke $-1, +1$ gehörigen Tschebyscheffschen Funktionen (9) $\vartheta_\nu^\nu = 2^{-\nu+1}$ ist. Besteht aber J_ν aus 2 Strecken $-1, a$ und $b, +1$, wo $b - a = \varepsilon_\nu$, so ist

57) $$\vartheta_\nu^\nu < 2\left(\frac{2-\varepsilon_\nu}{4}\right)^\nu,$$

aber natürlich $< 2^{-\nu+1}$.

Um (57) zu beweisen, ersetze man jede Nullstelle ξ des Polynoms $T_\nu(x)$, die $> b$ ist, durch $\xi - \varepsilon_\nu$ und eine etwa im Intervall a, b gelegene Nullstelle durch a. Dadurch geht $T_\nu(x)$ in ein Polynom $\overline{T_\nu(x)} = x^\nu + \cdots$ über, dessen Maximalwert auf der Strecke $-1,\ 2-\varepsilon_\nu$ einerseits nach (56) $> 2\left(\frac{2-\varepsilon_\nu}{4}\right)^\nu$ ist, während er andererseits offenbar kleiner als der Maximalwert von $|T_\nu(x)|$ in J_ν ist. Aus (56), (57) folgt, gleichviel, aus wie viel Strecken J_ν besteht,

58) $$\vartheta_\nu = \frac{1-\varepsilon_\nu'}{2}.$$

Mit $L_\nu(x)$ bezeichne ich das Polynom ν^{ten} Grades

59) $$L_\nu(x) = x^\nu + \cdots,$$

für das

60) $$\int\limits_{J_\nu} L_\nu^2(x)\,dx$$

möglichst klein ausfällt; dieser Minimalwert sei $\varkappa_\nu^\nu$. Indem man zum Vergleich die Polynome (11) heranzieht, beweist man

61) $$\varkappa_\nu = \frac{1-\varepsilon_\nu''}{2}$$

genau wie (58).

Die Polynome $Q_\nu(x)$ und die Konstanten k_ν sollen die gleiche Bedeutung haben wie in § 1, nur mit Voraussetzung (54) statt (8). Dann tritt an Stelle von (12) folgende Ungleichung

$$62)\quad k_\nu^2 > \int_{J_\nu} p(x)\, Q_\nu^2(x)\, dx > g_\nu \int_{J_\nu} L_\nu^2(x)\, dx > \frac{g'_\nu}{2^{2\nu}} \text{ (wegen (61))}.$$

Da die Ungleichung (13) neben (62) ohne weiteres auch jetzt gilt, ist das Weiterbestehen von

$$14)\quad \lim_{\nu \to \infty} |k_\nu^{\frac{1}{\nu}}| = \tfrac{1}{2}$$

auch unter der Voraussetzung (54) bewiesen.

Die Ungleichung (15) überträgt sich ohne weiteres nur in der Form

$$63)\quad \int_{J_\nu} Q_\nu^2(x)\, dx < \frac{G_\nu}{2^{2\nu}}$$

und hieraus folgt (wie (17) aus (15)):

$$64)\quad |Q_\nu^2(x)| < \frac{G'_\nu}{2^{2\nu}}$$

für alle x in J_ν. Daß dann aber ganz von selber (64) auch für alle x der Strecke $-1, +1$ gilt, ergibt sich sofort aus dem zweiten der beiden in der Fußnote S. 160 bewiesenen Sätze. Nachdem aber einmal das Fortbestehen der Beziehungen (14), (17) auch unter der erweiterten Voraussetzung (54) festgestellt ist, verläuft der Rest des Beweises wörtlich wie in § 1.

Ganz anders werden die Verhältnisse, wenn wir nunmehr voraussetzen, daß $p(x)$ auf einer Anzahl m von Teilstrecken i_1, $i_2, \ldots i_m$ des Intervalls $-1, +1$ identisch Null ist. J sei der Rest dieses Intervalls nach Abzug der Strecken $i_1, i_2, \ldots i_m$; J besteht also aus einer Anzahl Strecken $J_1, J_2, \ldots J_k$, wo $k \geq m-1$ und $\leq m+1$ ist; in J möge $p(x)$ der Bedingung (8) oder (54) genügen. Ich schicke einige Hilfssätze voraus, die zum Teil auch abgesehen von ihrer Anwendung auf die vorliegende Aufgabe mitteilenswert erscheinen und die ich daher

gleich etwas allgemeiner fasse, als für den augenblicklichen Zweck nötig wäre.

In der $x = \xi + i\eta$-Ebene sei ein $p$fach zusammenhängendes, den Punkt ∞ enthaltendes Gebiet G gegeben; jeder der p Ränder $C_1, C_2, \ldots C_p$ von G darf aus einer einfachen Jordan-Kurve oder auch aus einem geradlinigen oder krummlinigen Schlitze bestehen. Mit Γ bezeichne ich den aus C_1, $C_2, \ldots C_p$ bestehenden Gesamtrand von G, mit $z = \xi' + i\eta'$ irgend einen Punkt von Γ.

$u(\xi, \eta)$ sei das logarithmische Potential einer einfachen Belegung

65) $$u(\xi, \eta) = \int_\Gamma \lg |z - x|\, \mu(z)\, |dz|,$$

das durch folgende Bedingungen eindeutig bestimmt ist:

66) $$\lim_{\xi^2 + \eta^2 \to \infty} (u(\xi, \eta) - \lg |x|) = 0,$$

67) $$u(\xi, \eta)$$

nimmt einen und den nämlichen konstanten Wert $\lg \varrho$ in allen Punkten des Gesamtrandes Γ an. Mit Γ_σ bezeichne ich die Kurve

68) $$u(\xi, \eta) = \lg \sigma \; (> \lg \varrho);$$

Γ_ϱ ist also so viel wie Γ.

Es gibt eine untere Grenze τ, der Art, daß für $\sigma > \tau$ keine Kurve Γ_σ einen Doppelpunkt hat; nur im Falle $p = 1$ ist $\tau = \varrho$.

$q_n(x)$ sei irgend ein Polynom n^{ten} Grades der Form

69) $$q_n(x) = x^n + \cdots$$

I. Satz: Das Maximum von $|q_n(x)|$ auf Γ_σ ist $\geq \sigma^n$.

Das logarithmische Potential

70) $$\frac{1}{n} \lg |q_n(x)| - u(\xi, \eta)$$

verschwindet im Unendlichen (wegen (66), (69)). Es nimmt also in dem unendlichen von Γ_σ begrenzten abgeschlossenen Gebiete seinen Maximalwert auf Γ_σ an, und dieser ist nicht

negativ. D. h. aber das Maximum von $\frac{1}{n} \lg |q_n(x)|$ auf Γ_σ ist $\geqq \lg \sigma$. Das Zeichen $=$ kann hier offenbar nur dann gelten, wenn das Potential (70) identisch Null ist.

II. Satz: Es gibt Polynome $q_n(x)$ der Form (69), deren Betrag auf $\Gamma_\sigma < (\sigma + \varepsilon_n)^n$ ist mit $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$; und zwar gilt dies gleichmäßig für alle $\sigma > \sigma'$, falls nur $\sigma' > \varrho$ ist.

Denn (ein hinreichend großes n von vornherein vorausgesetzt) kann man in einem beliebig vorgeschriebenen Teilgebiete G' von G die rechte Seite von (65) mit beliebiger Annäherung durch eine Summe

$$71) \qquad \sum_1^m {}^i \frac{\mu_i}{n} \lg |z_i - x|$$

ersetzen, wo die z_i-Punkte auf Γ und μ_i positive ganze Zahlen sind, deren Summe $= n$ ist. Das Polynom

$$72) \qquad \prod_1^m {}^i (x - z_i)^{\mu}$$

hat dann die verlangte Eigenschaft.

III. Satz:[1]) Ist auf irgend einer Kurve Γ_σ (einschließlich des Grenzfalles $\Gamma_\varrho = \Gamma$) der Betrag irgend eines Polynoms n^{ten} Grades $k_n(x)$ kleiner als L, so ist auf einer Kurve Γ_ω, wo $\omega > \sigma$ ist,

$$73) \qquad |k_n(x)| < L \left(\frac{\omega}{\sigma}\right)^n.$$

Das logarithmische Potential

$$74) \qquad \frac{1}{n} \lg |k_n(x)| - \mu(\xi, \eta)$$

besitzt nämlich auf Γ_ω einen jedenfalls nicht größeren Maximalwert als auf Γ_σ.

[1]) In dem besonderen Fall, wo Γ aus einer Strecke besteht, schon von S. Bernstein bewiesen: Mém. publiés par l'Acad. des sciences de Belgique 1912.

Diesem Satze kann der folgende gegenüber gestellt werden:

IV. Satz: Hat das Polynom $k_n(x)$ im Außengebiet von Γ_σ und auf Γ_σ keine Nullstellen und ist auf Γ_σ

75) $$|k_n(x)| > l,$$

so ist auf Γ_ω, falls $\omega > \sigma$:

76) $$|k_n(x)| > l\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)^n.$$

Das Minimum des Potentials (74) ist nämlich auf Γ_ω nicht kleiner als auf Γ_σ.

Ferner gilt der folgende

V. Satz: Sind $q_n(x) = x^n + \cdots$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ Polynome mit dem Koeffizienten 1 der höchsten Potenz, und liegt keine Nullstelle dieser Polynome im Außengebiet von Γ_σ $(\sigma \geqq \varrho)$, ist ferner (was nach Satz II möglich ist), für einen Wert $\sigma' \geqq \sigma$

77) $$\lim_{n \to \infty} \left(\begin{matrix}\text{Maximum von } |q_n(x)| \\ \text{auf } \Gamma_{\sigma'}\end{matrix}\right)^{\frac{1}{n}} = \sigma',$$

so konvergiert die Folge

78) $$\sqrt[n]{\frac{1}{q_n(x)}} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

wo die n^{ten} Wurzeln durch die Bedingung

79) $$\lim_{x \to \infty} x \sqrt[n]{\frac{1}{q_n(x)}} = 1$$

eindeutig definiert sind, gleichmäßig im Außengebiete G_λ von Γ_λ, falls nur $\lambda > \sigma$, gegen eine reguläre analytische für $x = \infty$, aber sonst nirgends in G_λ verschwindende Funktion $F(x)$ und es ist in G_λ

80) $$-\lg |F(x)| = u(\xi, \eta).$$

Insbesondere hat also die Beziehung (77) die viel bestimmtere

81) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|q_n(x)|} = \lambda$$[1])

gleichmäßig für alle x auf Γ_λ und alle $\lambda > \sigma$ zur Folge.

Jedenfalls kann man nach einem bekannten Montelschen Satze aus der Folge (78) eine Teilfolge auswählen, die in G_λ gleichmäßig gegen eine reguläre für $x = \infty$ aber nirgends sonst verschwindende Funktion $f(x)$ konvergiert. Auf $\Gamma_{\sigma'}$ ist

82) $$\text{Maximum von } |f(x)|^{-1} = \sigma'.$$

Im Außengebiet von $\Gamma_{\sigma'}$ ist also das Potential

83) $$-\lg |f(x)| - u(\xi, \eta)$$

das auf der Randkurve $\Gamma_{\sigma'}$ seinen Maximalwert Null erreicht < 0 und identisch Null, wenn es in einem inneren Punkte dieses Außengebietes verschwindet, was tatsächlich für $x = \infty$ stattfindet. Die Funktion $f(x)$ hat somit alle von $F(x)$ behaupteten Eigenschaften, und es braucht nur noch gezeigt zu werden, daß die Folge (78) selbst, nicht nur eine aus ihr herausgehobene Teilfolge konvergiert. Wäre das nicht der Fall, so konnte man aus (78) eine zweite Teilfolge herausheben, die gegen eine andere Funktion als $f(x)$, etwa $\varphi(x)$ in G_λ konvergiert; dann würde aber wieder

84) $$-\lg |\varphi(x)| \equiv u(\xi, \eta), \text{ also } |\varphi(x)| = |f(x)|$$

folgen; nach dieser Gleichung könnte sich $\varphi(x)$ nur durch einen konstanten Faktor vom Betrage 1 von $f(x)$ unterscheiden; da aber $\lim_{x\to\infty} (\varphi(x) : f(x)) = 1$ ist, hat die Annahme, $\varphi(x)$ sei nicht mit $f(x)$ identisch, auf einen Widerspruch geführt. Die Gleichmäßigkeit der Konvergenz der Folge (78) in G_λ ist selbstverständlich, da jede in einem Gebiete G_λ konvergente

[1]) Falls die Randkurve Γ aus der Strecke $-1, +1$ besteht, ist die Behauptung (81) offenbar mit (33) identisch. Doch ist das dort benutzte einfache Beweisverfahren nur anwendbar, wenn das Außengebiet der Kurve Γ_σ einfach zusammenhängend ist. Durch das oben Bewiesene wird zugleich eine Vermutung bestätigt, die ich in einer früheren Arbeit (Math. Ann. 64 (1907), S. 121, Gl. (20)) ausgesprochen habe.

Folge beschränkter analytischer Funktionen in G_λ gleichmäßig konvergiert.

Wir nehmen nun an, die Kurve $\Gamma (= \Gamma_\varrho)$ bestehe aus den doppelt zählenden, S. 168 eingeführten Strecken $J_1, J_2, \ldots J_k$; das Außengebiet von Γ ist also ein sog. Schlitzbereich.

$$T_\nu(x) = x^\nu + \cdots \tag{85}$$

sei das zu $J = J_1 + J_2 + \cdots + J_k$ gehörige Tschebyscheffsche Polynom ν^{ter} Ordnung; sein Maximalwert auf J sei ϱ_ν^ν, dann folgt aus den Sätzen I, II sofort, daß

$$\lim_{\nu \to \infty} \varrho_\nu = \varrho \tag{86}$$

ist. Es ist einleuchtend, daß die sämtlichen Nullstellen der Polynome $T_\nu(x)$ auf der Strecke $-1, +1$ liegen, auch ist leicht einzusehen, daß in jedem der Intervalle $i_1, i_2, \ldots i_m$, die mit $J_1, J_2, \ldots J_k$ zusammen die Strecke $-1, +1$ ausfüllen, höchstens eine Nullstelle von $T_\nu(x)$ liegt[1]. Lägen nämlich beispielsweise in i_k zwei Nullstellen x' und $x'' > x'$ von $T_\nu(x)$ und würde man dann $\varepsilon > 0$ so klein wählen, daß auch die Punkte $x' - \varepsilon$ und $x'' + \varepsilon$ in i_k liegen, so würde die Ersetzung der beiden Faktoren $(x - x')$, $(x - x'')$ in $T_\nu(x)$ durch $(x - (x' - \varepsilon))$, $(x - (x'' + \varepsilon))$ bewirken, daß das so aus $T_\nu(x)$ hervorgehende Polynom an jeder Stelle in J, die keine Nullstelle von $T_\nu(x)$ ist, einen dem Betrage nach kleineren Wert annimmt als $T_\nu(x)$, was im Widerspruch steht mit der Definition des Tschebyscheffschen Polynoms $T_\nu(x)$.

Wir zerlegen $T_\nu(x)$ in zwei Faktoren:

$$T_\nu(x) = t_{\nu-\beta}(x)\,\tau_\beta(x) = (x^{\nu-\beta} + \cdots)(x^\beta + \cdots), \tag{87}$$

deren zweiter gerade an den in den Intervallen $i_1, i_2, \ldots i_m$ gelegenen Nullstellen von $T_\nu(x)$ verschwindet; sind solche nicht vorhanden, so ist $\tau_\beta(x) \equiv 1$. Jedenfalls also ist der Grad β von τ_β höchstens gleich m.

---

[1]) Es kommen nur solche Intervalle i_l in Frage, die ganz im Innern der Strecke $-1, +1$ liegen; denn es ist von vornherein klar, daß in einem Intervall i_l, das einen der Punkte ± 1 zum einen Endpunkt hat, keine Nullstelle von $T_\nu(x)$ liegen kann.

88) $$L_\nu(x) = x^\nu + \cdots$$

habe die Eigenschaft, daß

89) $$\int\limits_J L_\nu^2(x)\,dx$$

möglichst klein ausfällt; dieser Minimalwert ist $g_\nu^2 \varrho_\nu^{2\nu}$; denn einerseits ist er $\leq \int\limits_J T_\nu^2(x)\,dx < \varrho_\nu^{2\nu}$ mal der Summe der Längen der Intervalle $J_1, J_2, \ldots J_k$. Andererseits aber würde die Annahme, (89) sei für unendlich viele ν kleiner als $(\varrho_\nu\,\alpha)^{2\nu}$, mit $\alpha < 1$ durch den Schluß, der von (15) zu (17) führte, ergeben, daß für jene ν

90) $$|L_\nu(x)| < G_\nu(\alpha\,\varrho_\nu)^\nu \text{ in } J$$

wäre, was wieder einen Widerspruch mit der Definition der Tschebyscheffschen Polynome bedeutet.

Jetzt aber ist alles so weit geklärt, daß man die Gleichungen

91) $$\lim_{\nu\to\infty} |\sqrt[\nu]{k_\nu}| = \varrho,$$

92) $$|Q_\nu(x)| < G_\nu\,\varrho^\nu \text{ in } J$$

genau wie zuvor die Gleichungen (14), (64) beweisen kann.

Nun besitzt $Q_\nu(x)$ genau wie $T_\nu(x)$ in jedem der Intervalle $i_1, i_2, \ldots i_m$ höchstens eine Nullstelle, so daß eine (87) ganz entsprechende Zerlegung

93) $$Q_\nu(x) = q_{\nu-\gamma}(x)\,\varkappa_\gamma(x)$$

möglich ist. Aus (92) folgt dann nach Satz V an Stelle von (81) zunächst nur

94) $$\lim_{\nu\to\infty} |q_{\nu-\beta}(x)|^{\frac{1}{\nu-\beta}} = \lambda$$

gleichmäßig auf C_λ, während die allgemeinere Beziehung

95) $$\lim_{\nu\to\infty} |Q_\nu(x)|^{\frac{1}{\nu}} = \lambda$$

für gewisse Punkte der Strecken $i_1, i_2, \ldots i_m$, die übrigens nur eine Menge vom Maße Null bilden, nicht zu gelten braucht.

Um die Reihen $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu Q_\nu(x)$ zu untersuchen, bilde man

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \frac{1}{\alpha}. \tag{96}$$

Es sei 1) $\alpha > \tau$[1]) (vgl. S. 169).

Dann konvergiert die Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu Q_\nu(x)$ in dem einfach zusammenhängenden Innengebiet der Kurve Γ_α, während sie außerhalb divergiert. Die durch die Reihe dargestellte Funktion hat auf der Kurve Γ_α mindestens eine singuläre Stelle. Umgekehrt läßt sich jede im Innern von Γ_α reguläre analytische Funktion $F(x)$ in eine Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu Q_\nu(x)$ entwickeln mit eindeutig bestimmten Koeffizienten a_ν. Ist 2) $\varrho < \alpha < \tau$, so konvergiert die Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu Q_\nu(x)$ wieder im Innengebiet von Γ_α, aber dieses besteht jetzt aus mehreren getrennten Bereichen, in denen die angegebene Reihe verschiedene analytische Funktionen darstellen kann. Auch ist es möglich, daß die Reihe in einzelnen außerhalb Γ_α gelegenen Ausnahmepunkten der Intervalle $i_1, i_2, \ldots i_m$ konvergiert.

§ 3. Ergänzungen. Zusätze.

Nur um mit einer bestimmten Vorstellung zu rechnen und um des dadurch ermöglichten bequemeren Ausdrucks willen setze ich im folgenden voraus, daß $p(x)$ auf keiner Teilstrecke des Intervalls $-1, +1$ identisch Null ist; die Ergebnisse und Beweise übertragen sich leicht sinngemäß auf den allgemeinen Fall.

---

[1]) τ kann im vorliegenden Falle offenbar auch so definiert werden:

$\tau = \lim_{\nu\to\infty}$ Maximum von $\sqrt[\nu]{|Q_\nu(x)|}$ für alle x des Intervalls $-1, +1$.

Als Zähler $Z_\nu(z)$ des Kettenbruchs für das Integral (2) findet man bekanntlich

$$Z_\nu(z) = -\int_{-1}^{+1} \frac{Q_\nu(x) - Q_\nu(z)}{x - z} p(x)\,dx. \tag{97}$$

Für alle z eines unendlichen Gebietes T, das ganz außerhalb der Strecke $-1, +1$ liegt und für alle x dieser Strecke gilt nach dem in § 1 und 2 Bewiesenen

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{Q_\nu(x)}{Q_\nu(z)} = 0. \tag{98}$$

Daher folgt aus (97):

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{Z_\nu(z)}{Q_\nu(z)} = \int \frac{p(x)\,dx}{x - z} \tag{99}$$

gleichmäßig für alle z in T[1]).

Aus (99) ergibt sich weiter für alle z in T:

$$\lim_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{\left|\frac{Z_\nu(z)}{Q(z)}\right|} = 1 \tag{100}$$

und also wegen (33):

$$\lim_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu-1]{|Z_\nu(z)|} = \frac{R}{2} \tag{101}$$

für alle Punkte z der Ellipse R.

Die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu Z_{\nu+1}(z)$ konvergiert daher genau wie die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu Q_\nu(z)$ im Innern der Ellipse R und divergiert außerhalb, wenn

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \frac{2}{R} < 2 \tag{102}$$

vorausgesetzt wird. Es läßt sich auch umgekehrt leicht zeigen,

[1]) Für (99) gibt es einen ganz anderen Beweis von Markoff; s. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig 1913, S. 385.

daß jede im Innern dieser Ellipse reguläre analytische Funktion sich in eine Reihe $\sum_0^\infty a_\nu Z_{\nu+1}(z)$ mit eindeutig bestimmten Koeffizienten a_ν entwickeln läßt; nur gibt es für diese nach Kettenbruchzählern fortschreitende Reihen nicht so einfache Koeffizientenformeln wie für die Reihen nach Kettenbruchnennern.

Ferner ist klar, daß jede im Innern einer Ellipse R reguläre Funktion daselbst als Grenzwert der Lagrangeschen Interpolationsformel dargestellt werden kann, wenn als Interpolationsstellen die Nullstellen der Polynome $Q_\nu(x)$ (oder auch $Z_\nu(x)$) gewählt werden.

Endlich beweist man leicht, daß für die Anzahl n_ν der auf einer Teilstrecke a, b ($> a$) der Strecke -1, $+1$ gelegenen Nullstellen des Polynoms $Q_\nu(x)$ (oder auch $Z_\nu(x)$) die Formel

$$103)\qquad \lim_{\nu\to\infty} \frac{n_\nu}{\nu} = \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

gilt. Allgemein sind die Nullstellen von $Q_\nu(x)$ für $\nu\to\infty$, auch wenn Intervalle $i_1, \ldots i_m$, in denen $p(x)\equiv 0$ ist, zugelassen werden, auf die Intervalle $J_1, J_2, \ldots J_k$ nach dem gleichen Gesetze verteilt wie die Elektrizitätsmenge 1, falls die als unendlich dünne leitende Stäbe aufzufassenden Strecken J_1, $J_2, \ldots J_k$ durch diese Belegung alle auf das gleiche konstante Potential gebracht werden sollen.

Hat man neben dem Integral (2) noch ein zweites

$$104)\qquad \int_{-1}^{+1} \frac{p_1(x)\,dx}{x-z}$$

wo $p_1(x)$ in keinem Teilintervall der Strecke -1, $+1$ identisch verschwindet, in dem $p(x)$ nicht identisch verschwindet, und umgekehrt, bedeutet ferner $S_\nu(z)$ einen Näherungszähler oder Nenner ν^{ten} Grades des Kettenbruchs für das eine oder andere dieser Integrale und ist endlich

105)
$$U_\nu(z) = -\int_{-1}^{+1} \frac{S_\nu(x) - S_\nu(z)}{x - z}\, p(x)\, dx,$$

so ist wegen

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{S_\nu(x)}{S_\nu(z)} = 0$$

(für irgend ein z außerhalb der Strecke -1, $+1$ und alle x auf dieser Strecke):

107)
$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{U_\nu(z)}{S_\nu(z)} = \int_{-1}^{+1} \frac{p(x)\, dx}{x - z}.$$

Das ist eine sehr weit reichende Verallgemeinerung des Markoffschen Satzes (99).

Revision des Atomgewichtes des Thalliums. Analyse des Thallochlorids.

Von **O. Hönigschmid, L. Birckenbach** und **E. Kothe.**

(Aus dem Chem. Labor. der bayer. Akad. der Wissenschaften.)

Vorgetragen in der Sitzung am 17. Juni 1922.

Das heute gültige Atomgewicht des Thalliums beruht auf den Ergebnissen der klassischen Untersuchung von Crookes[1]), die vor 50 Jahren ausgeführt wurde und den Wert Tl = 204,04 ergab. Crookes benutzte als Bestimmungsmethode die Synthese von Thallonitrat, ausgehend von reinem Thalliummetall. Diese Methode ist an sich einwandfrei und wurde von ihm auch in mehrjähriger Arbeit unter Überwindung der großen Schwierigkeiten, die ihre Ausführung bietet, in vorzüglicher Weise gemeistert. Richards und Forbes[2]) bedienten sich in neuerer Zeit der prinzipiell gleichen Methode zur Ermittlung des fundamentalen Verhältnisses von Silber zu Sauerstoff, und ihr so gefundener Atomgewichtswert für Silber ist heute als der beste anzusehen, über den wir verfügen. Ein Vergleich ihrer Arbeitsweise mit der von Crookes läßt allerdings erkennen, daß sein Werk entsprechend den inzwischen erzielten Fortschritten und der Vervollkommnung der Hilfsmittel nicht mehr den modernen Ansprüchen genügen kann und daher eine Revision dieses Atomgewichtes als erwünscht erscheinen muß. Im letzten halben Jahrhundert hatte sich die Atomgewichtsforschung nur sehr wenig mit dem Thallium beschäftigt. Es liegt zwar eine vor 30 Jahren ausgeführte Untersuchung von Lepierre[3]) vor, die

---

[1]) Crookes, Phil. Trans. 163, 277 (1874).

[2]) Richards und Forbes, Zeitschr. f. anorg. Ch. 55, 34 (1907).

[3]) Lepierre, Bull. soc. chim. (3), 9, 166 u. 11, 423.

aber nicht wesentlich zur Klärung der Frage beigetragen hat, da die Ergebnisse der nach vier verschiedenen Methoden ausgeführten Bestimmungen untereinander recht abweichende Resultate lieferten, die im wesentlichen den Crookes'schen Wert zu bestätigen schienen.

Wir entschieden uns für die Analyse des Thallochlorids, das bisher noch nicht als Ausgangsmaterial zur Bestimmung des Atomgewichtes des Thalliums verwendet worden war. Allerdings haben Wells und Penfield 1894 zwei Analysen des Thallochlorids ausgeführt und aus denselben das Atomgewicht berechnet, doch geschah dies im Verlaufe einer anderen Zwecken dienenden Untersuchung, so daß die Bestimmungen, die zu dem Werte 204,48 führten, kaum irgend welche Beachtung fanden, zumal sie nicht den Anspruch auf höchste Genauigkeit erheben konnten.

Herstellung der Reagentien.

Die verwendeten Reagentien wurden sorgfältigst gereinigt. Das Wasser wurde zweimal destilliert und zwar mit alkalischer Permanganatlösung und mit verdünnter Schwefelsäure. Die Salzsäure und Salpetersäure wurden mit Quarzkühler destilliert. Das Silber war nach den besten Methoden der Harvardschule gereinigt und zwar fünfmal als Nitrat aus konzentrierter Lösung mit Salpetersäure gefällt, mit Ammoniumformiat reduziert, das Metall auf einer Unterlage aus reinstem Kalk mit dem Gebläse zu großen Reguli geschmolzen, dann elektrolytisch aus salpetersaurer Lösung kathodisch abgeschieden, wobei die Reguli als Anode dienten. Schließlich wurden die gut gewaschenen Silber-Kristalle in Kalkschiffchen im Wasserstoffston zu Reguli verschiedener Größe geschmolzen, geätzt, gewaschen und getrocknet.

Reinigung des Materials.

Zur Gewinnung des Thallochlorids gingen wir von käuflichem Thalliummetall aus, das wir in verdünnter Schwefelsäure lösten; aus der konzentrierten Lösung abgeschiedenes Thallosulfat wurde fünfmal umkristallisiert und dabei die stark

verdünnte Mutterlauge der dritten Kristallisation durch Einleiten von Schwefelwasserstoff auf Blei untersucht. Trotzdem die mit H_2S gesättigte Lösung lange im verschlossenen Gefäß stehen blieb, schied sich nicht eine Spur von Bleisulfid ab. Aus der stark verdünnten Lösung des Sulfats fällten wir mit destillierter Salzsäure das Thallochlorid aus, trennten die Kristalle durch Zentrifugieren in Platintrichtern von der Mutterlauge und kristallisierten sie noch 3 bis 5 mal unter Eiskühlung aus reinem Wasser um. Diese Operation wurde in großen Platintöpfen vorgenommen und jedesmal das Chlorid in Platintrichtern zentrifugiert. Die Analysen des dreimal kristallisierten Produktes gaben die gleichen Werte wie diejenigen des fünfmal umkristallisierten, so daß eine Fortsetzung der Kristallisation nicht zu einem reineren Produkt hätte führen können. Das frisch abgeschiedene Thallochlorid ist vollkommen weiß, färbt sich aber im Lichte violett, doch bei weitem nicht so rasch wie Chlorsilber.

Wage und Gewichte.

Es wurde eine auf 0,01 bis 0,02 mg empfindliche Rueprechtwage verwendet und feinst justierte Präzisionsgewichte aus vergoldetem Messing resp. Platin, die nach Richards geeicht waren. Sämtliche Wägungen wurden durch Substitution mit Gegengewichten ausgeführt und auf den luftleeren Raum reduziert. Folgende Vakuumkorrekturen kamen zur Anwendung.

	spez. Gew.	Vak. Korr. f. 1 g
Messinggewichte	8,4	—
Tl Cl	7,2	+ 0,28 mg
Ag Cl	5,56	+ 0,73 „
Ag	10,5	— 0,28 „

Vorbereitung des Thallochlorids zur Analyse.

Während der Kristallisation des Chlorids ist es absolut nicht zu vermeiden, daß gelegentlich des oftmaligen Aufkochens der Lösung trotz aller Vorsichtsmaßregeln, wie Vornahme der Auflösung und der Kristallisation unter einem Schutzschirm

etwas Laboratoriumsstaub in dieselbe gelangt, der dem Chlorid beigemischt bleibt. Andererseits sollte das Chlorid vor der Wägung geschmolzen werden, wie es die Praxis moderner Atomgewichtsbestimmung von der zu wägenden Substanz verlangt. Beim Schmelzen des Chlorids verkohlt nun der Staub, so weit er organischer Natur ist, und gibt sich beim Auflösen als schwarzer Rückstand zu erkennen. Es erschien deshalb als absolut notwendig, das Chlorid zu destillieren, ein Verfahren, das sich schon bei der Analyse des Bleichlorids ausgezeichnet bewährt hatte. Hiezu diente der schon öfter beschriebene Quarzapparat, der es ermöglicht, flüchtige Metallhalogenide in ein gewogenes Quarzröhrchen in beliebigem Gasstrom zu destillieren, sie darin zu schmelzen und das Quarzröhrchen mit dem Halogenid in gereinigtem und trockenem Luftstrom in sein Wägeglas einzuschieben und dieses zu verschließen, ohne es vorher mit der Laboratoriums-Atmosphäre in Berührung zu bringen.

Die Destillation wurde im Stickstoffstrom oder in trockener Luft vorgenommen, nachdem sich bei Vorversuchen gezeigt hatte, daß beim Arbeiten in einem HCl-Strom offenbar eine Additionsverbindung zwischen TlCl und HCl gebildet wird, die eine Braunrotfärbung des Clorids zur Folge hat. Das so destillierte und geschmolzene Chlorid war stets vollkommen farblos und durchsichtig, ähnlich reinstem geschmolzenen Chlorsilber. Im Stickstoff oder in Luft geschmolzen besitzt es offenbar eine sehr kleine Oberflächenspannung, da es die Wände des Röhrchens stark benetzt, was zur Folge hat, daß infolge der Kontraktion des festhaftenden Chlorids beim Abkühlen das Quarzröhrchen zumeist zersprengt wird, wenn man nicht noch vor dem Erstarren des geschmolzenen Chlorids durch Drehen des Quarzapparates dafür sorgt, daß das geschmolzene Chlorid in möglichst dünner Schicht an den Wänden des Röhrchens verteilt wird. Wird es hingegen im Chlorwasserstoff geschmolzen, so erstarrt es am Quarzglas nicht haftend mit konvexer Oberfläche.

Ausführung der Analysen.

Das gewogene Chlorid wurde in heißem Wasser in einem 3 Liter Erlenmeyer-Kolben mit eingeschliffenem Stopfen gelöst. Während der Auflösung wurde das an einem dünnen Platindraht befestigte Quarzröhrchen mit dem Chlorid im Wasser schwebend gehalten, während der Kolben mittels elektrischer Heizplatte erhitzt wurde, ohne daß die Lösung zum Sieden kam. Ein Schutzschirm verhinderte das Hineinfallen von Staub in die Lösung. Nach einigen Stunden war das Chlorid vollkommen klar ohne jeglichen Rückstand gelöst.

Die Analyse erfolgte durch Bestimmung der beiden Verhältnisse TlCl : Ag und TlCl : AgCl in üblicher Weise durch gravimetrische Titration mit Hilfe des Nephelometers resp. durch Wägung des mit überschüssigem Silbernitrat abgeschiedenen Silberchlorids. Es wurde zunächst in einigen Vorversuchen aus dem zweiten Verhältnis ein vorläufiger Wert für das gesuchte Atomgewicht ermittelt und dann unter Zugrundelegung desselben die zur Fällung des Chlorions im gewogenen Thallochlorid benötigte Silbermenge berechnet, mit Hilfe der Silberregugi genauest ausgewogen, in verdünnter Salpetersäure gelöst, die Lösung auf ca. 0,1 Normalität verdünnt und damit die Fällung bewirkt. Ein Überschuß des einen oder anderen Ions wurde auf nephelometrischem Wege ermittelt.

Verhältnis TlCl : Ag.

Nr. d. Anal.	Präp.	TlCl i. Vak.	Ag. i. Vak.	TlCl : Ag	At. Gew. v. Tl.
1	5 × krist.	4,54695	2,04516	2,22327	204,39
2	3 × „	4,87772	2,19400	2,22320	204,38
3	3 × „	4,44375	1,99880	2,22320	204,38
4	3 × „	4,73108	2,12806	2,22318	204,38
5	3 × „	4,70255	2,11521	2,22321	204,38
6	3 × „	4,81477	2,16565	2,22324	204,39
7	3 × „	4,75748	2,13955	2,22358	204,42
8	4 × „	4,76741	2,14415	2,22344	204,41
9	5 × „	4,64623	2,09013	2,22294	204,35
10	5 × „	4,95373	2,22829	2,22310	204,37
11	5 × „	4,07035	1,83075	2,22332	204,40
12	5 × „	5,43917	2,44658	2,22317	204,38
		56,75019	25,52633	2,22324	204,39

Zwölf Bestimmungen des Verhältnisses TlCl : Ag ergaben als Mittelwert das Atomgewicht Tl = 204,39 mit einer mittleren Abweichung vom Mittel von ± 0,012. Im ganzen verbrauchten 56,75019 g TlC zur Fällung des Chlorions 25,52633 g Ag. Aus diesen Zahlen ergibt sich für das Verhältnis TlCl : Ag der Wert 2,22320 und das Atomgewicht Tl = 204,38.

Verhältnis TlCl : AgCl.

Nr. d. Anal.	Präp.	TlCl i. Vak.	AgCl i. Vak.	TlCl : AgCl	At. Gew. v. Pl.
2 a	3 × krist.	4,87772	2,91508	1,67327	204,38
3 a	3 × „	4,44375	2,65516	1,67362	204,43
4 a	3 × „	4,73108	2,82758	1,67319	204,37
5 a	3 × „	4,70255	2,81039	1,67327	204,39
6 a	3 × „	4,81477	2,87677	1,67367	204,44
7 a	3 × „	4,75748	2,84329	1,67323	204,38
8 a	4 × „	4,76741	2,84883	1,67346	204,41
9 a	5 × „	4,64623	2,77697	1,67313	204,36
11 a	5 × „	4,07035	2,43251	1,67331	204,39
12 a	5 × „	5,43917	3,25060	1,67328	204,39
13	5 × „	6,36696	3,80514	1,67325	204,38
14	5 × „	4,94141	2,95334	1,67316	204,37
		58,55888	34,99566	1,67332	204,39

$P_1 : P_2 = 1 : 1,6$; $\Delta = 3,5 : 10000$; $\Delta_1 = 2,5 : 10000$; $\Delta_2 = 0,35 : 10000$.

Aus zwölf Bestimmungen des Verhältnisses TlCl : AgCl ergibt sich als Mittelwert das Atomgewicht Tl = 204,39 mit einer mittleren Abweichung vom Mittel von ± 0,02. Insgesamt ergaben 58,55888 g Tl bei der Fällung mit Silber 34,99566 g AgCl. Aus diesen Zahlen berechnet sich das Verhältnis TlCl : AgCl zu 1,67332 und das Atomgewicht des Thalliums zu Tl = 204,39.

Beide Analysenserien ergeben demnach identische Mittelwerte, weshalb wir den Wert **Tl = 204,39** als das derzeit wahrscheinlichste Atomgewicht des Thalliums betrachten.

Diesem Resultat kommt auch ein gewisses theoretisches Interesse zu. Fajans[1]) hat vor kurzem einen Instabilitätssatz aufgestellt, nach welchem keine stabile Atomart mit ungerad-

[1]) Fajans: Radioaktivität und die neueste Entwickelung der Lehre von den chemischen Elementen, 4. Aufl., 1922, Seite 93.

zahliger Kernladung und einem durch vier teilbaren Atomgewicht existieren dürfte. Nach diesem Satz müßte deshalb entweder das bisher geltende Atomgewicht Tl = 204,0 (Kernladung 81) unrichtig sein, oder ein zufällig ganzzahliges Verbindungsgewicht eines Isotopengemisches vorstellen. Als uns nun Fajans von dieser Überlegung in Kenntnis setzte, konnten wir ihm gleich deren Richtigkeit wenigstens zum Teil bestätigen, denn da das von uns inzwischen ermittelte Verbindungsgewicht 204,39 stark von der Ganzzahligkeit abweicht, muß es als sehr wahrscheinlich gelten, daß das Thallium in der Tat ein Isotopengemisch vorstellt. Ob allerdings in diesem Isotopengemisch, wie es der „Instabilitätssatz" fordert, keine Atomart mit dem Atomgewicht 204,0 existiert, wird erst die Analyse mit Hilfe der positiven Strahlen entscheiden.



Über die äussere Berandung eines im Endlichen gelegenen Gebietes und den Jordanschen Kurvensatz.

Von **Alfred Pringsheim.**

Vorgetragen in der Sitzung am 17. Juni 1922.

Ein älterer von Herrn E. Phragmén[1]) herrührender Satz besagt, daß eine Punktmenge, welche die vollständige Begrenzung eines im Endlichen gelegenen Gebietes bildet, irgend einen Teil enthalten muß, welcher zusammenhängend[2]) ist. Ich gebe im folgenden diesem Satze eine wesentlich vervollkommnete Fassung, welche einen genaueren Einblick in die Struktur jenes zusammenhängenden Begrenzungsteils gibt und seinen Charakter als äußere Berandung des betreffendes Gebietes deutlich hervortreten läßt, und beweise ihn nach einer Methode, welche sich gleichzeitig als geeignet erweist, als Grundlage für einen neuen Beweis des Jordanschen Kurvensatzes zu dienen. Nach meinem Dafürhalten dürfte derselbe in Bezug auf gedankliche Einfachheit und Anschaulichkeit vor den bisherigen Beweisen gewisse Vorzüge besitzen und mag daher trotz deren bereits recht stattlicher Zahl als nicht ganz überflüssig erscheinen. Es ist doch immerhin einigermaßen auffallend, daß bei der prinzipiellen Wichtigkeit, ja fundamentalen Bedeutung jenes Satzes die deutschen Lehrbücher der Funktionentheorie sich stets mit seiner Erwähnung begnügen, daß aber noch kein

[1]) Acta mathematica 7 (1885), S. 45.

[2]) Ich zitiere den von Herrn Phragmén benützten Ausdruck. Derselbe läßt sich aber ohne weiteres durch den prägnanteren ersetzen, daß jener Begrenzungsteil ein linienhaftes Kontinuum (d. h. eine zusammenhängende abgeschlossene Punktmenge ohne Innenpunkte) bildet.

einziges den Versuch gemacht hat, einen der vorhandenen Beweise in einer für den Anfänger genießbaren Form zu reproduzieren[1]). Während übrigens die große Mehrzahl der fraglichen Beweise die Gültigkeit des Satzes für ein beliebiges (einfach geschlossenes) Polygon voraussetzt, wird dieselbe im folgenden nur für ein Treppenpolygon[2]) in Anspruch genommen.

---

§ I. Der Phragménsche Satz.

1. Es sei eine unbegrenzte Folge endlicher Punktmengen mit beständig zunehmender Gliederzahl n_ν gegeben: $\{P_{n_0}^{(0)}\}$, $\{P_{n_1}^{(1)}\}$, ..., $\{P_{n_\nu}^{(\nu)}\}$, ... ausführlicher geschrieben:

$$\begin{array}{l} P_1^{(0)},\ P_2^{(0)},\ P_3^{(0)},\ \ldots,\ P_{n_0}^{(0)}, \\ P_1^{(1)},\ P_2^{(1)},\ P_3^{(1)},\ \ldots,\ P_{n_1}^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_1^{(\nu)},\ P_2^{(\nu)},\ P_3^{(\nu)},\ \ldots,\ P_{n_\nu}^{(\nu)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

wo:

$$P_1^{(0)} = P_1^{(1)} = \cdots = P_1^{(\nu)} = \cdots,$$

---

[1]) Eine Ausnahme macht das Osgoodsche Lehrbuch der Funktionentheorie (1. Aufl. 1907, 2. Aufl. 1912) nur insofern, als es für den sehr speziellen Fall „regulärer" (d. h. abteilungsweise mit stetig sich drehender Tangente begabter) Kurven einen von Herrn L. D. Ames herrührenden, übrigens doch ziemlich umständlichen Beweis wiedergibt (I, S. 130—141, bzw. 160—172).

[2]) Einen einfachen Beweis für diesen besonderen Fall habe ich im Jahrgang 1915 dieser Berichte mitgeteilt (s. insbesondere a. a. O., S. 41. Übrigens läßt sich der dort gegebene Beweis noch etwas vereinfachen) Im Anschluß hieran möchte ich noch hervorheben, daß aus der Gültigkeit des Jordanschen Satzes für ein Treppenpolygon mit Leichtigkeit diejenige für eine geschlossene abteilungsweise monotone Kurve gefolgert werden kann. Will man sich also überhaupt mit dem Beweise eines Spezialfalles begnügen (der dann für die üblichen funktionentheoretischen Anwendungen mehr als ausreichend ist), so erscheint die Beschränkung auf abteilungsweise monotone Kurven weit zweckmäßiger als diejenige auf reguläre (in dem Sinne, wie in Fußn. 1).

so daß also jede dieser Mengen mit demselben Punkte $P_1^{(0)}$ beginnt. Ferner soll jede aus der unmittelbar vorhergehenden lediglich durch Einschaltung bzw. Anfügung weiterer Punkte, im übrigen mit Festhaltung der bestehenden Ordnung hervorgehen und somit alle vorhergehenden als Teilmengen enthalten. Wird dann für hinlänglich großes ν der Abstand je zweier konsekutiver Punkte beliebig klein, etwa:

$$\overline{P_\lambda^{(\nu)} P_{\lambda+1}^{(\nu)}} < \varepsilon \text{ für } \nu \geqq n, \quad \lambda = 1, 2, \ldots n_\nu - 1,$$

so ist die (offenbar abzählbare) Vereinigungsmenge der obigen Mengen, die wir mit $\lim\limits_{\nu \to \infty} \{P_{n_\nu}^{(\nu)}\}$ bezeichnen wollen, zusammenhängend, und man hat:

$$\lim_{\nu \to \infty} \overline{P_\lambda^{(\nu)} P_{\lambda+1}^{(\nu)}} = 0 \tag{1}$$

nicht nur für jedes einzelne λ, sondern auch für beliebig ins Unendliche wachsende $\lambda \leqq n_\nu - 1$.

Kommt nun zu dieser Bedingung noch die folgende hinzu:

$$\lim_{\nu \to \infty} \overline{P_{n_\nu}^{(\nu)} P_1^{(\nu)}} \equiv \lim_{\nu \to \infty} \overline{P_{n_\nu}^{(\nu)} P_1^{(0)}} = 0, \tag{2}$$

so soll jene Vereinigungsmenge als zyklisch zusammenhängend bezeichnet werden. Sie läßt sich dann, ohne den Charakter des zyklischen Zusammenhanges zu verlieren, in der Weise zyklisch permutieren, daß sie mit einem beliebig vorzuschreibenden ihrer Punkte, etwa $P_\lambda^{(\mu)}$ beginnt. Um dies zu erzielen, hat man nur die obige Mengenfolge nach Weglassung der ersten μ Zeilen mit der folgenden Menge zu beginnen:

$$P_\lambda^{(\mu)}, P_{\lambda+1}^{(\mu)}, \ldots P_{n_\mu}^{(\mu)}, P_1^{(\mu)}, P_2^{(\mu)}, \ldots P_{\lambda-1}^{(\mu)}$$

und jede der folgenden Mengen gleichfalls zyklisch so zu permutieren, daß sie mit dem Gliede beginnt, welches den Punkt $P_\lambda^{(\mu)}$ vorstellt.

2. Dies vorausgeschickt beweisen wir jetzt den folgenden Hauptsatz:

Die Berandung eines im Endlichen gelegenen zusammenhängenden Bereiches $\mathfrak{B}$ enthält ein linienhaftes Kontinuum $\mathfrak{L}$, welches die Ebene in zwei getrennte Punktmengen zerlegt, nämlich ein ins Unendliche sich erstreckendes lückenloses Gebiet von Außenpunkten des Bereiches $\mathfrak{B}$ und eine innere Punktmenge, welche den Bereich $\mathfrak{B}$ enthält. Dieses Kontinuum erscheint als Grenzgebilde einer Folge ineinander liegender Treppenpolygone und besteht aus einer zyklisch zusammenhängenden abzählbaren Punktmenge mit Hinzunahme ihrer Grenzpunkte.

Beweis. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit den Bereich $\mathfrak{B}$ als abgeschlossen annehmen. Seine Berandung kann dann von vorneherein keinen isolierten Punkt enthalten.

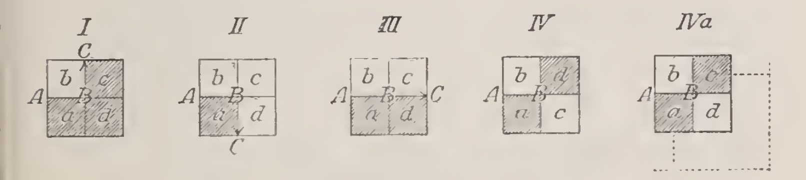
Es werde nun zunächst $\mathfrak{B}$ in ein Quadrat $\mathfrak{Q}$, etwa von der Seitenlänge λ eingeschlossen, groß genug, daß alle Randpunkte von $\mathfrak{B}$ in das Innere von $\mathfrak{Q}$ fallen, somit, da sie eine abgeschlossene Menge bilden, einen gewissen Minimalabstand ε_0 von der Grenze $\mathfrak{Q}$ besitzen. Wird jetzt eine natürliche Zahl m_0 so gewählt, daß: $\delta_0 \equiv \frac{\lambda}{m_0} < \varepsilon_0$ und darauf $\mathfrak{Q}$ in m_0^2 Teilquadrate von der Seitenlänge δ_0 zerlegt, so werden sämtliche an die vier Seiten von $\mathfrak{Q}$ angrenzenden Teilquadrate weder im Innern, noch auf dem Rande einen Randpunkt von $\mathfrak{B}$ enthalten, also ausschließlich aus Außenpunkten von $\mathfrak{B}$ bestehen. An den so entstandenen quadratischen Ring von randpunktfreien Teilquadraten schließen wir alle etwa vorhandenen[1]) gleichfalls randpunktfreien Quadrate des nach innen angrenzenden zweiten quadratischen Ringes, sodann von den etwaigen randpunktfreien Quadraten des dritten Ringes

[1]) Sollte kein solches randpunktfreies Quadrat vorhanden sein, so muß der im Text angenommene entgegengesetzte Fall, wie aus den weiteren Betrachtungen hervorgeht, bei hinlänglicher Verfeinerung des quadratischen Netzes sicher eintreten, man braucht also nur die oben mit m_0 bezeichnete Zahl entsprechend zu vergrößern.

nur diejenigen, welche längs einer Seite an ein randpunktfreies Quadrat des zweiten Ringes angrenzen oder mit einem aus diesem Grunde bereits angeschlossenen Quadrate des dritten Ringes in gleicher Art zusammenhängen. Dieses Verfahren soll fortgesetzt werden, so lange noch randpunktfreie Quadrate vorhanden sind, die mit einem bereits angeschlossenen längs einer Seite zusammenhängen.

Die Zusammenfassung aller dieser Teilquadrate mit der außerhalb $\mathfrak{Q}$ liegenden Punktmenge liefert ein ins Unendliche sich erstreckendes Gebiet $\mathfrak{A}_0$ von Außenpunkten des Bereiches $\mathfrak{B}$, welches, wie sogleich gezeigt werden soll, von einem einzigen (einfach geschlossenen) Treppenpolygon begrenzt wird.

Wir betrachten irgend eine der Begrenzung von $\mathfrak{A}_0$ angehörige Teilquadratseite, etwa die (nur behufs Fixierung der Ausdrucksweise) horizontal angenommene Strecke $\overline{AB}$, die also die Trennungslinie zwischen einem (zu $\mathfrak{A}_0$ gehörigen) randpunktfreien und einem randpunkthaltigen Quadrate oder, wie wir von jetzt ab zumeist kürzer sagen wollen, zwischen einem $\mathfrak{A}$-Quadrate und einem $\mathfrak{R}$-Quadrate bildet. Das erstere (in den Figuren I—IVa mit a bezeichnet) mag, um eine (an sich wiederum gleichgültige) Festsetzung zu treffen, unterhalb, das letztere (eben daselbst mit b bezeichnet) oberhalb $\overline{AB}$ angenommen werden. Für die beiden nach rechts benachbarten Quadrate sind dann bezüglich ihrer Zugehörigkeit zu den $\mathfrak{A}$- oder $\mathfrak{R}$-Quadraten die 4 verschiedenen, durch die Figuren I—IV dargestellten Fälle denkbar: die $\mathfrak{A}$-Quadrate sind dabei durch Schraffierung gekennzeichnet, die $\mathfrak{R}$-Quadrate weiß gelassen.



Man erkennt unmittelbar, daß es in den Fällen I—III stets eine und nur eine Quadratseite gibt (nämlich die mit $\overline{BC}$ bezeichnete), die als Begrenzungsstück des Gebietes $\mathfrak{A}_0$ sich an $\overline{AB}$ anschließt. Eine Schwierigkeit würde sich dagegen im Falle der Figur IV ergeben, in dem ja eine jede der drei an $\overline{AB}$ sich anschließenden Quadratseiten der Begrenzung von $\mathfrak{A}_0$ angehören müßte. Dieser Fall kann nun aber in Wirklichkeit niemals eintreten. Denn jedes der beiden mit a und c bezeichneten $\mathfrak{A}$-Quadrate gehört ja zu $\mathfrak{A}_0$ und hängt daher mit dem anderen zusammen (wie in Fig. IVa durch die punktierten Linien schematisch angedeutet ist). Da außerdem der Punkt B kein Randpunkt von $\mathfrak{B}$ ist, so besitzt er auch eine gewisse randpunktfreie Umgebung, die also aus lauter Außenpunkten von $\mathfrak{B}$ besteht. Hiernach würde also das Quadrat d, das mindestens einen Randpunkt von $\mathfrak{B}$ enthalten müßte, von einem aus lauter Außenpunkten bestehenden Gebiet vollständig umschlossen und von dem gleichfalls randpunkthaltigen Quadrate b abgetrennt sein, was der Voraussetzung des Zusammenhanges von $\mathfrak{B}$ widerspricht. Damit ist also das Eintreten jeder anderen Möglichkeit, als der in Fig. I—III dargestellten ausgeschlossen[1]).

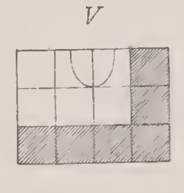
Da die analoge Schlußweise auch auf die in Fig. I—III mit $\overline{BC}$ bezeichnete Quadratseite anwendbar ist (d. h. *mutatis mutandis*, wenn die letztere, wie in Fig. I und II, vertikal liegt), ebenso auch in Bezug auf die Fortsetzung der Quadratseite $\overline{AB}$ nach links, so erscheint zunächst als Begrenzung von $\mathfrak{A}_0$ ein an die Strecke $\overline{AB}$ nach rechts sich anschließender Treppenweg, der sich niemals verzweigen und nie-

[1]) Erst gelegentlich der Drucklegung dieser Mitteilung werde ich darauf aufmerksam gemacht, daß der von Herrn A. Winternitz herrührende Beweis des Jordanschen Kurvensatzes (Math. Zeitschrift 1 [1918]) an einer Stelle (a. a. O., S. 332/3) genau die vorstehende Schlußweise enthält. Obschon der übrige Teil seines Beweises mit dem hier gegebenen des Phragménschen und des Jordanschen Satzes kaum irgend welche weitere Berührungspunkte besitzt, so schien es mir doch angemessen, die obige Tatsache ausdrücklich zu erwähnen.

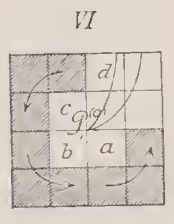
mals abbrechen kann, also schließlich bei A wieder einmünden muß und so zu einem einfach geschlossenen Treppenpolygon $\mathfrak{T}_0$ wird. Dieses letztere zerlegt die Ebene in zwei getrennte Gebiete, deren inneres den Bereich $\mathfrak{B}$ und zwar wegen des Zusammenhanges von $\mathfrak{B}$ vollständig enthält, während das äußere (einschließlich seiner polygonalen Begrenzung) lediglich aus Außenpunkten von $\mathfrak{B}$ besteht und ein lückenlos[1]) ins Unendliche sich erstreckendes, oben bereits mit $\mathfrak{A}_0$ bezeichnetes Gebiet bildet.

Die an $\mathfrak{T}_0$ nach innen anliegenden[2]) $\mathfrak{R}$-Quadrate haben teils eine Seite, teils nur einen Eckpunkt[3]) miteinander gemein. Liegt ein Randpunkt im Innern eines solchen Quadrats, so muß das letztere deren unendlich viele enthalten, da ja jeder Randpunkt zugleich Häufungspunkt von Randpunkten ist. Liegt er dagegen auf einer Quadratseite (die dann selbstverständlich nicht zu $\mathfrak{T}_0$ gehört), so kann er für das betreffende Quadrat und, wenn er ein Eckpunkt ist, auch für zwei benachbarte (s. Fig. V), ja sogar für drei in diesem Eckpunkt aneinander stoßende Quadrate (s. Fig. VI) der einzige sein. Es besteht daher im äußersten Falle die Möglichkeit, daß die Gesamtheit der Randpunkte, welche den an $\mathfrak{T}_0$ anliegenden $\mathfrak{R}$-Quadraten angehören, eine endliche Menge bilden. Im allgemeinen wird aber diese Menge eine unendliche sein. Wir wollen

V



VI



[1]) Es kann nicht etwa ein zweites Treppenpolygon von der Art des mit $\mathfrak{T}_0$ bezeichneten irgend ein Teilgebiet aus $\mathfrak{A}_0$ ausschneiden, da dessen Existenz wieder der Voraussetzung des Zusammenhanges von $\mathfrak{B}$ widersprechen würde.

[2]) „Anliegend“ bedeutet immer: längs einer Seite zusammenhängend.

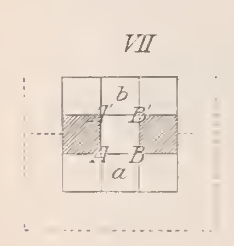
[3]) Einen Eckpunkt nämlich dann, wenn dieser der Scheitel eines einspringenden Winkels von $\mathfrak{T}_0$ bildet.

nun darauf ausgehen, für diesen Fall eine bestimmte endliche Menge daraus zu isolieren. Hierzu heben wir aus jedem der an $\mathfrak{T}_0$ anliegenden $\mathfrak{R}$-Quadrate je einen solchen Punkt heraus, der von einer zu $\mathfrak{T}_0$ gehörigen Quadratseite den kleinsten Abstand hat, d. h., da ja ein $\mathfrak{R}$-Quadrat höchstens drei zu $\mathfrak{T}_0$ gehörige Quadratseiten enthalten kann, höchstens drei solche Punkte, die aber auch teilweise oder insgesamt und zwar sogar gleichzeitig für zwei oder drei benachbarte $\mathfrak{R}$-Quadrate in einen einzigen zusammenfallen können (s. Fig. V, VI). Sollten andererseits für irgend eine Quadratseite mehrere bzw. unendlich viele „nächstgelegene" Randpunkte vorhanden sein, so soll es frei stehen, einen beliebigen davon auszuwählen.

Wir fixieren nun irgend eins der an $\mathfrak{T}_0$ anliegenden $\mathfrak{R}$-Quadrate als Nr. 1 und denken uns, von diesem ausgehend, einen vollständigen Umlauf längs $\mathfrak{T}_0$ etwa in positiver Richtung ausgeführt, zugleich jeder einzelnen zu $\mathfrak{T}_0$ gehörigen Quadratseite bzw. Folge von zwei oder drei solchen Quadratseiten (wie in Fig. V, VI) den oben herausgehobenen nächstgelegenen Randpunkt zugeordnet und der Reihenfolge entsprechend numeriert.

Eine scheinbare Schwierigkeit könnte hierbei eintreten, falls ein $\mathfrak{R}$-Quadrat, das zwei parallele Seiten (ohne verbindende dritte) mit $\mathfrak{T}_0$ gemein hat und daher bei Umlaufung von $\mathfrak{T}_0$ zweimal passiert wird, nur einen einzigen Randpunkt enthielte. Dieser Fall kann aber wiederum in Wirklichkeit niemals eintreten, wie die folgende Überlegung zeigt. Angenommen, es gäbe ein Quadrat der fraglichen Art, etwa das in Fig. VII mit $ABB'A'$ bezeichnete. Die beiden schraffierten Quadrate sind dann als randpunktfrei und (wie durch die punktierten Linien wieder schematisch angedeutet) zu $\mathfrak{A}_0$ gehörig anzusehen, während jedes der beiden anderen anliegenden, mit a und b bezeichneten Quadrate Randpunkte von $\mathfrak{B}$ enthalten müssen. Der

VII



hypothetische einzige, dem Quadrate $\overline{ABB'A'}$ angehörige Randpunkt müßte dann auf $\overline{AB}$ oder $\overline{A'B'}$ liegen, so daß die ganze Fläche des Quadrats $\overline{ABB'A'}$ mit Ausnahme dieses einzigen Punktes aus lauter Außenpunkten von $\mathfrak{B}$ bestehen und durch Vermittelung der beiden schraffierten Nachbarquadrate mit $\mathfrak{A}_0$ zusammenhängen würde. Dann lägen aber die beiden randpunkthaltigen Quadrate a und b in zwei vollständig von Außenpunkten umschlossenen getrennten Gebieten, was wieder der Voraussetzung des Zusammenhanges von $\mathfrak{B}$ widersprechen würde. Das gleiche würde aber sogar schon dann eintreten, wenn das Quadrat $\overline{ABB'A'}$ irgend ein, die beiden schraffierten Nachbarquadrate verbindendes Gebiet (z. B. einen beliebig schmalen Streifen) von Außenpunkten enthielte. Es muß daher eine von $\overline{AB}$ zu $\overline{A'B'}$ sich erstrekkende zusammenhängende und dann *eo ipso* abgeschlossene Menge, also mindestens ein Kontinuum von Randpunkten vorhanden sein, das dann auch die Existenz eines Kontinuums von Innenpunkten des Bereiches $\mathfrak{B}$ nach sich zieht, das also insbesondere keinesfalls aus einer einzigen zu $\overline{AA'}$ parallelen Strecke bestehen kann. Daraus folgt aber, daß es zu jeder der beiden parallelen Seiten $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ einen besonderen nächstgelegenen Randpunkt gibt und daß der am nächsten zu $\overline{AA'}$ liegende von $\overline{BB'}$ entfernter ist, als der zu $\overline{BB'}$ nächstliegende.

Hiernach läßt sich also in der Tat nach der angegebenen Vorschrift eine bestimmte, eindeutig geordnete endliche Folge „ausgezeichneter“ Randpunkte:

$$P_1^{(0)},\ P_2^{(0)},\ P_3^{(0)},\ \ldots\ P_{n_0}^{(0)},$$

deren Gesamtheit mit $\{P_{n_0}^{(0)}\}$ bezeichnet werden möge, aus der Menge derjenigen, die den an $\mathfrak{T}_0$ anliegenden $\mathfrak{R}$-Quadraten angehören, herausheben. Der Abstand zweier konsekutiver dieser ausgezeichneten Randpunkte, also die Strecke

$\overline{P_\lambda^{(0)} P_{\lambda+1}^{(0)}}$ ($\lambda = 1, 2, \ldots n_0 - 1$) ist dann im äußersten Fall[1]) nicht größer als $2\sqrt{2}\cdot\delta_0$. Dies gilt auch für $\overline{P_{n_0}^{(0)} P_1^{(0)}}$, da ja der beim Schluß des Umlaufs als letzter vor $P_1^{(0)}$ auftretende Punkt $P_{n_0}^{(0)}$ dem Nachbarquadrat des Quadrates Nr. 1, oder allenfalls[2]) dem nächst- bzw. übernächst[3]) vorangehenden angehört.

Die Menge der Randpunkte, welche nicht nur den (bisher ausschließlich in Betracht gezogenen) an $\mathfrak{T}_0$ anliegenden, sondern auch den nur in einem Eckpunkte an $\mathfrak{T}_0$ anstoßenden[4]) $\mathfrak{R}$-Quadraten angehören, besitzt wiederum einen gewissen Minimalabstand von $\mathfrak{T}_0$, etwa δ_0' (wo $\delta_0' < \delta_0$ sein kann). Wird jetzt eine natürliche Zahl $m_1 \geqq 3$ so angenommen, daß:
$\delta_1 \equiv \dfrac{\lambda}{m_0 m_1} < \delta_0'$ $\left(\text{und zugleich } \textit{eo ipso}\text{: } \delta_1 \leqq \tfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\lambda}{m_0} = \tfrac{1}{3}\delta_0\right)$,
sodann jedes der von $\mathfrak{T}_0$ eingeschlossenen Quadrate in m_1^2 Teilquadrate von der Seitenlänge δ_1 zerlegt, so bilden die an $\mathfrak{T}_0$ längs einer Seite oder auch nur in einem Eckpunkt anstoßenden Teilquadrate einen lediglich aus Außenpunkten von $\mathfrak{B}$

---

[1]) Nämlich, wenn $P_\lambda^{(0)}$, $P_{\lambda+1}^{(0)}$ zwei $\mathfrak{R}$-Quadraten angehören, die nur einen Eckpunkt gemein haben. Andernfalls hat man:

$$\overline{P_\lambda^{(0)} P_{\lambda+1}^{(0)}} \leqq \sqrt{2}\cdot\delta_0 \quad \text{bzw.} \leqq \sqrt{5}\cdot\delta_0,$$

je nachdem $P_\lambda^{(0)}$, $P_{\lambda+1}^{(0)}$ demselben bzw. zwei aneinander liegenden $\mathfrak{R}$-Quadraten angehören.

[2]) Nämlich, wenn jenes Nachbarquadrat den Punkt $P_1^{(0)}$ mit dem Quadrat Nr. 1 gemeinsam hat und keinen weiteren enthält.

[3]) Vgl. Fig. VI. Nimmt man daselbst das Quadrat a als Quadrat Nr. 1, so würde bei der durch die Pfeile angedeuteten Umlaufsrichtung weder b, noch c, vielmehr erst d den Puukt $P_{n_0}^{(0)}$ liefern.

[4]) S. z. B. in Fig. II das mit c bezeichnete Quadrat. Daselbst würden nur die Quadrate b und d für die Auswahl der ausgezeichneten Randpunkte $P_\lambda^{(0)}$ in Betracht kommen. Andererseits könnte aber das Quadrat c einen Randpunkt enthalten, der näher an dem Eckpunkt B liegt, als die ausgezeichneten Randpunkte der Quadrate b und d an den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$, was dann bei der Bestimmung des im Text mit δ_0' bezeichneten Abstandes ausschlaggebend wäre.

bestehenden Ring, der außer von $\mathfrak{T}_0$ von einem im Abstande δ_1 parallel zu $\mathfrak{T}_0$ verlaufenden Treppenpolygone $\mathfrak{T}_0'$ begrenzt wird. Enthält dann irgend ein an $\mathfrak{T}_0'$ anliegendes Quadrat einen der ausgezeichneten Randpunkte $P_\lambda^{(0)}$, so ist dieser wieder ein nächstgelegener in Bezug auf diejenige Quadratseite, welche jetzt an die Stelle der früher dem Punkte $P_\lambda^{(0)}$ zugeordneten (ihr parallelen) größeren Quadratseite getreten ist. Es besteht dann die Möglichkeit, daß schon alle Punkte $P_\lambda^{(0)}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots n_0)$ auf diese Weise wieder zum Vorschein kommen. Es können aber auch Punkte $P_\lambda^{(0)}$ (möglicherweise sogar alle) infolge der Verkleinerung der Teilquadrate durch ein oder auch mehrere (einen Streifen von der Breite δ_1 bildende) Zwischenquadrate von $\mathfrak{T}_0'$ getrennt sein. Alle diese Zwischenquadrate mögen dann an das Treppenpolygon $\mathfrak{T}_0'$ noch angesetzt werden[1]), ebenso auch alle Quadrate, die etwa von zwei senkrecht zueinander verlaufenden zusammenstoßenden Streifen und einem Teil von $\mathfrak{T}_0'$ eingeschlossen werden[2]). Alsdann tritt an die Stelle des Treppenpolygons $\mathfrak{T}_0'$ jetzt ein neues $\mathfrak{T}_0''$, dessen Äußeres wieder aus einem lückenlosen Gebiet von Außenpunkten des Bereiches $\mathfrak{B}$ besteht, während das Innere diesen letzteren enthält. Zugleich besitzt dasselbe die Eigenschaft, daß bei positivem, mit dem Quadrate, welches den Punkt $P_\lambda^{(0)}$ enthält, beginnenden Umlauf in den an $\mathfrak{T}_0''$ nach innen anliegenden Quadraten sämtliche Punkte der Menge $\{P_{n_0}^{(0)}\}$ und zwar genau in der früheren Reihenfolge auftreten.

Andererseits können aber unter den an $\mathfrak{T}_0''$ nach innen anliegenden Quadraten noch weitere randpunktfreie vorhanden sein. Auch diese fügen wir noch zu dem von $\mathfrak{T}_0''$ be-

---

[1]) Sollte einer der Punkte $P_\lambda^{(0)}$ auf der Trennungslinie zweier benachbarter Zwischenquadrate liegen, so mögen diese beiden bzw. ein entsprechender Streifen von der Breite $2\,\delta_1$ an $\mathfrak{T}_0'$ angeschlossen werden.

[2]) Solche Quadrate sind sicher randpunktfrei. Denn die entgegengesetzte Annahme würde wiederum auf den bereits mehrfach vorgekommenen Widerspruch gegen den vorausgesetzten Zusammenhang von $\mathfrak{B}$ führen.

grenzten Komplexe hinzu, ebenso auch alle diejenigen, die mit diesen oder einem anderen bereits angeschlossenen längs einer Seite zusammenhängen sollten, und setzen dieses Verfahren so lange fort, bis jedes der äußersten angeschlossenen randpunktfreien an ein randpunkthaltiges anzuliegen kommt. Als Begrenzung aller so zusammengeschlossenen $\mathfrak{A}$-Quadrate erscheint dann auf Grund der bei dem Existenznachweise des Treppenpolygons $\mathfrak{T}_0$ benützten Schlußweise ein (einfach geschlossenes) Treppenpolygon $\mathfrak{T}_1$, welches nach innen den Bereich $\mathfrak{B}$ enger umschließt, als jedes der Treppenpolygone $\mathfrak{T}_0$, $\mathfrak{T}_0'$, $\mathfrak{T}_0''$ (falls es nicht mit dem letztgenannten bzw. mit beiden letztgenannten identisch ist), und nach außen wiederum ein lückenloses Gebiet $\mathfrak{A}_1$ von Außenpunkten begrenzt, welches das zuvor mit $\mathfrak{A}_0$ bezeichnete als Teil enthält. Aus jedem, der nunmehr an $\mathfrak{T}_1$ anliegenden, durchweg randpunkthaltigen Quadrate (unter denen auch alle bereits an $\mathfrak{T}_0''$ anliegenden $\mathfrak{R}$-Quadrate, insbesondere die $P_\lambda^{(0)}$-haltigen vorkommen) heben wir wieder genau nach den zuvor getroffenen Festsetzungen eine (nur zum Teil neue) Menge ausgezeichneter Randpunkte heraus, welche die Menge $\{P_{n_0}^{(0)}\}$ als Teilmenge enthält. Die ihr angehörigen Punkte mögen in der Reihenfolge, welche bei positivem, mit der dem Punkte $P_1^{(0)}$ zugeordneten Quadratseite beginnenden Umlauf um $\mathfrak{T}_1$ zum Vorschein kommt, mit:

$$P_1^{(1)},\ P_2^{(1)},\ P_3^{(1)},\ \ldots\ P_{n_1}^{(1)} \quad (\text{wo: } P_1^{(1)} \equiv P_1^{(0)}),$$

ihre Gesamtheit mit $\{P_{n_1}^{(1)}\}$ bezeichnet werden. Für den Abstand konsekutiver Punkte besteht jetzt die Beziehung:

$$\overline{P_\lambda^{(1)}\, P_{\lambda+1}^{(1)}} \leqq 2\sqrt{2}\cdot\delta_1 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots n_1 - 1)$$

und dieselbe obere Schranke gilt auch für $\overline{P_{n_1}^{(1)}\, P_1^{(1)}}$.

Wir behaupten nun, daß die innerhalb der Folge $\{P_{n_1}^{(1)}\}$ vollständig enthaltene Menge der Punkte $P_\lambda^{(0)}$, abgesehen von Einschaltungen weiterer Randpunkte, wieder genau in der ursprünglichen Anordnung auftritt, wie dies ja bei der Umlaufung von $\mathfrak{T}_0''$ noch der Fall war und offenbar bestehen bliebe, wenn

jetzt nur diejenigen neuerdings ausgezeichneten Randpunkte zwischengeschaltet würden, welche an $\mathfrak{T}_0''$ anliegenden $\mathfrak{R}$-Quadraten angehören. Es erscheint aber fraglich, ob bei Aufzählung aller möglichen bei Umlaufung von $\mathfrak{T}_1$ auftretenden ausgezeichneten Randpunkte nicht irgend einer der Punkte $P_\lambda^{(0)}$ sich zwischen zwei Punkte $P_\varkappa^{(0)}$ und $P_{\varkappa+1}^{(0)}$ einschieben könnte. Das ist selbstverständlich ausgeschlossen, wenn $P_\varkappa^{(0)}$ und $P_{\varkappa+1}^{(0)}$ demselben oder zwei (wenn auch nur in einem Eckpunkt) an einander stoßenden Quadraten angehören. Es kommt daher lediglich der Fall in Betracht, daß $P_{\varkappa+1}^{(0)}$ einem Quadrate angehört, das bei Umlaufung von $\mathfrak{T}_0''$ nicht unmittelbar dem mit $P_\varkappa^{(0)}$ besetzten folgt. Wird das zwischen diesen beiden Quadraten verlaufende Stück des Treppenpolygons $\mathfrak{T}_0''$ von lauter $\mathfrak{R}$-Quadraten begrenzt, so gehört dasselbe auch dem Treppenpolygon $\mathfrak{T}_1$ an, sodaß in diesem Abschnitt der Umlaufung von $\mathfrak{T}_1$ gegen früher keinerlei Änderung eintritt. Eine solche wird erst dann möglich, wenn längs des fraglichen Stückes von $\mathfrak{T}_0''$ durchweg oder wenigstens teilweise $\mathfrak{A}$-Quadrate anliegen. Sei dann etwa das (aus einer oder mehreren Quadratseiten bestehende) Wegstück $\overline{A \ldots B}$ von $\mathfrak{T}_0''$ das erste, an welchem durchweg $\mathfrak{A}$-Quadrate anliegen. Um $\mathfrak{T}_1$ aus $\mathfrak{T}_0''$ herzustellen, wird zunächst an jede zu $\overline{A \ldots B}$ gehörige Quadratseite ein $\mathfrak{A}$-Quadrat angesetzt und mit weiterer Hinzufügung von $\mathfrak{A}$-Quadraten so lange fortgefahren, bis der entstandene Komplex, abgesehen von dem Wegstück $\overline{A \ldots B}$, durchweg von $\mathfrak{R}$-Quadraten begrenzt wird. Seine Begrenzung entsteht aus zwei Treppenwegen, die bei A und bei B beginnend schließlich zu einem einzigen, die Punkte A und B verbindenden Treppenwege t zusammenlaufen müssen[1]). Denn keiner jener beiden Treppenwege kann abbrechen oder an irgend einem nicht zu $\overline{A \ldots B}$ gehörigen Punkte von $\mathfrak{T}_0''$ bzw. $\mathfrak{T}_1$ einmünden, da auf diese Weise das Treppenpolygon in zwei

[1]) Die Begegnung der beiden Treppenwege kann auch in einem zu $\overline{A \ldots B}$ gehörigen Eckpunkt stattfinden.

solche zerfallen würde, das eine den Randpunkt $P_{\varkappa}^{(0)}$, das andere $P_{\varkappa+1}^{(0)}$ enthaltend, was wiederum den Zusammenhang von $\mathfrak{B}$ zerreissen würde. Der von A nach B führende Treppenweg t tritt dann bei positiver Umlaufung von $\mathfrak{T}_1$ an die Stelle des Wegstückes $\overline{A\ldots B}$ bei Umlaufung von $\mathfrak{T}_0''$. Dabei werden sich eine Anzahl der neuerdings ausgezeichneten Randpunkte zwischen $P_{\varkappa}^{(0)}$ und $P_{\varkappa+1}^{(0)}$ einschieben. Soll die gleiche Möglichkeit für einen der älteren Serie angehörigen Punkt $P_{\lambda}^{(0)}$ bestehen, so muß der Treppenweg t eine Seite mit demjenigen an $\mathfrak{T}_0''$ anliegenden $\mathfrak{R}$-Quadrat $\mathfrak{Q}_{\lambda}$ gemein haben, welches den Punkt $P_{\lambda}^{(0)}$ enthält. Dies ist nun, da t, wie bemerkt, außer Punkten von $\overline{A\ldots B}$ keinen weiteren Punkt mit $\mathfrak{T}_0''$ gemein haben kann, einzig in der Weise möglich, daß $\mathfrak{Q}_{\lambda}$ nur eine zu $\mathfrak{T}_0''$ gehörige Seite besitzt und der Randpunkt $P_{\lambda}^{(0)}$ als nächstliegender ihr zugeordnet ist, während die ihr parallele Seite zu t gehört. Für diese muß aber auf Grund des zuvor im Anschluß an Fig. VII gesagten ein neuer nächstgelegener Punkt $P_{\mu}^{(1)}$ vorhanden sein und nur dieser letztere schiebt sich unter diejenigen zwischen $P_{\varkappa}^{(0)}$ und $P_{\varkappa+1}^{(0)}$ ein, während $P_{\lambda}^{(0)}$ auch bei Umlaufung von $\mathfrak{T}_1$ erst hinter $P_{\varkappa+1}^{(0)}$ an die Reihe kommen kann[1]).

Hiermit ist also der Nachweis erbracht, daß in der Punktmenge $\{P_{n_1}^{(1)}\}$ alle Punkte von $\{P_{n_0}^{(0)}\}$ genau in ihrer ursprünglichen Reihenfolge, lediglich durch eingeschobene Zwischenpunkte getrennt, enthalten sind.

Da auf $\mathfrak{T}_1$ selbst wieder kein Randpunkt liegt, die Menge der letzteren also durch einen gewissen Minimalabstand von $\mathfrak{T}_1$ getrennt ist, so läßt sich das Verfahren, welches von $\mathfrak{T}_0$ aus zur Herstellung von $\mathfrak{T}_1$ führte, wiederholen und zwar unbegrenzt oft wiederholen. Man erhält also auf diese Weise

---

[1]) Diese ganze Betrachtung bleibt auch gültig, wenn an die Stelle von $P_{\lambda}^{(0)}$, $P_{\lambda+1}^{(0)}$ die im zyklischen Sinne konsekutiven Punkte $P_{n_0}^{(0)}$, $P_1^{(0)}$ treten.

eine unbegrenzt fortsetzbare Folge ineinander liegender, aus lauter Außenpunkten von $\mathfrak{B}$ bestehender Treppenpolygone:

$$\mathfrak{T}_0,\ \mathfrak{T}_1,\ \mathfrak{T}_2,\ \ldots\ \mathfrak{T}_\nu,\ \ldots,$$

welche nach außen eine entsprechende Folge lückenloser, beständig zunehmender und sich gegenseitig umfassender Gebiete von Außenpunkten:

$$\mathfrak{A}_0,\ \mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2,\ \ldots\ \mathfrak{A}_\nu,\ \ldots$$

begrenzen, während sie nach innen den Bereich $\mathfrak{B}$ immer enger umschließen. Diese letztere Tatsache findet ihren präziseren Ausdruck in der nachgewiesenen Existenz einer unbegrenzten Folge endlicher, durchweg mit demselben Punkte $P_1^{(0)}$ beginnender, durch systematische Einschaltung bzw. Anfügung neuer Punkte aus einander hervorgehender, fest geordneter Randpunktmengen:

$$\{P_{n_0}^{(0)}\},\ \{P_{n_1}^{(1)}\},\ \{P_{n_2}^{(2)}\},\ \ldots\ \{P_{n_\nu}^{(\nu)}\},\ \ldots$$

(wo: $P_1^{(\nu)} \equiv P_1^{(0)}$ für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$), die mit unbegrenzt wachsendem ν sich unbegrenzt verdichten und deren Vereinigungsmenge $\lim\limits_{\nu \to \infty} \{P_{n_\nu}^{(\nu)}\}$ durch die Treppenpolygone $\mathfrak{T}_\nu$ unbegrenzt approximiert wird. Diese letztere ist also zusammenhängend und zwar, da $\overline{P_{n_\nu}^{(\nu)}\, P_1^{(0)}}$ mit unbegrenzt wachsendem ν beliebig klein wird, zyklisch zusammenhängend. Durch Hinzunahme ihrer Häufungspunkte, die ja als Häufungspunkte von Randpunkten gleichfalls Randpunkte sind, wird sie zu einer abgeschlossenen und zwar, da sie als Menge von Randpunkten keine inneren Punkte enthalten kann, zu einem linienhaften Kontinuum $\mathfrak{L}$.

Dieses Kontinuum $\mathfrak{L}$ bildet die Begrenzung zweier verschiedener Punktmengen, nämlich erstens der Vereinigungsmenge $\mathfrak{A} = \lim\limits_{\nu \to \infty} \mathfrak{A}_\nu$ der Außengebiete $\mathfrak{A}_\nu$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ als eines lückenlos zusammenhängenden, sich ins Unendliche erstreckenden Gebietes von Außenpunkten des Bereiches $\mathfrak{B}$;

zweitens der Komplementärmenge zu $\mathfrak{A}$, deren Punkte, soweit sie nicht zu $\mathfrak{L}$ gehören, wir als innere Punkte (kürzer $\mathfrak{J}$-Punkte) von $\mathfrak{L}$, sie selbst mit $\mathfrak{J}$ bezeichnen. Diese letztere enthält den Bereich $\mathfrak{B}$, da das Gebiet $\mathfrak{A}$ keinen Punkt von $\mathfrak{B}$ enthält. Da ferner jeder $\mathfrak{A}$-Punkt außerhalb eines $\mathfrak{T}_\nu$ von hinlänglich großem (und um so mehr von noch größerem) Index ν, jeder $\mathfrak{J}$-Punkt innerhalb aller $\mathfrak{T}_\nu$ liegen muß, so findet zwischen je einem Punkte der einen und der anderen Kategorie kein Zusammenhang statt. Denn jeder einen $\mathfrak{A}$-Punkt und einen $\mathfrak{J}$-Punkt verbindende Streckenzug muß mit jedem $\mathfrak{T}_\nu$ von hinlänglich großem Index ν einen Punkt, also als Häufungspunkt dieser Punkte auch mit $\mathfrak{L}$ einen Punkt gemein haben. Es ist somit $\mathfrak{L}$ identisch mit der vollständigen Begrenzung der beiden Punktmengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ und bildet insbesondere in dem Sinne die äußere Berandung des Bereiches $\mathfrak{B}$, daß sie ihn von denjenigen Außenpunkten trennt, welche das lückenlos ins Unendliche sich erstreckende Gebiet $\mathfrak{A}$ bilden (möglicherweise freilich auch noch von anderen Außenpunkten, wie alsbald gezeigt werden soll).

3. Im Anschluß an das vorstehende Ergebnis ist noch zu bemerken, daß die Häufungspunkte der Menge $\lim\limits_{\nu \to \infty} \{P_{n_\nu}^{(\nu)}\}$ von zweierlei Art sein können. Die eine (stets vorhandene) Kategorie macht jene abzählbare Menge der „ausgezeichneten“ Randpunkte oder einen ihrer Abschnitte in der Weise zum Kontinuum, daß das letztere alle bzw. alle dem betreffenden Abschnitte angehörigen Punkte der Menge in sich aufnimmt und überall dicht enthält (in der Art, wie bei Hinzufügung der irrationalen Zahlen zu der abzählbaren Menge der rationalen des Intervalls $[0,1]$). Die andere (welche offenbar auch gänzlich fehlen kann) liefert Kontinua, welche, allenfalls abgesehen von einzelnen Punkten, überhaupt keine Punkte der Menge $\lim\limits_{\nu \to \infty} \{P_{n_\nu}^{(\nu)}\}$ enthalten. Ein bekanntes Beispiel dieser Art bildet die Annahme, daß ein Teil der äußeren Berandung von $\mathfrak{B}$ aus den Punkten (x, y) besteht, welche der

Gleichung: $y = \sin^2 \frac{\pi}{x}$, etwa für $0 < |x| \leq 1$, genügen. Die Menge der Häufungspunkte enthält alsdann die Strecke $\overline{01}$ der y-Axe, von der lediglich der eine Punkt (0,1) der Menge $\lim\limits_{\nu \to \infty} \{P_{n_\nu}^{(\nu)}\}$ angehört. Während nun hier das zu der übrigen äußeren Berandung von $\mathfrak{B}$ hinzutretende besondere Kontinuum nur aus einer einfachen Strecke besteht, so kann auch der zuerst von Herrn Brouwer[1]) bemerkte Fall (und zwar beliebig oft) eintreten, daß ein solches Kontinuum, also ein Teil der äußeren Berandung von $\mathfrak{B}$, zugleich die vollständige Begrenzung eines endlichen Gebietes von Außenpunkten des Bereiches $\mathfrak{B}$ bildet. Danach braucht also das zuvor mit $\mathfrak{L}$ bezeichnete linienhafte Kontinuum die Ebene keineswegs nur in zwei getrennte Gebiete zu zerlegen, vielmehr kann die oben mit $\mathfrak{J}$ bezeichnete, den Bereich $\mathfrak{B}$ enthaltende Punktmenge aus einer beliebigen Zahl getrennter Gebiete bestehen.

4. Wir wollen noch den Fall ins Auge fassen, daß irgend ein linienhaftes Kontinuum $\mathfrak{L}$ die vollständige Begrenzung eines Bereiches $\mathfrak{B}$ bildet (was nicht ausschließt, daß Teile von $\mathfrak{L}$ noch andere Bereiche begrenzen). Alsdann läßt sich $\mathfrak{L}$ auch von innen und zwar durch eine Folge sich gegenseitig umschließender Treppenpolygone beliebig approximieren und zugleich wieder in eine abzählbare, zyklisch zusammenhängende Punktmenge und die Menge der zugehörigen Häufungspunkte zerlegen.

Um dies einzusehen, denke man sich zunächst ein Quadrat $\mathfrak{Q}$, etwa von der Seitenlänge λ konstruiert, das ganz im Innern von $\mathfrak{L}$ liegt, also vollständig aus Innenpunkten von $\mathfrak{B}$ besteht. Man bestimme dann eine natürliche Zahl m_0 so, daß $\delta_0 \equiv \frac{\lambda}{m_0}$ kleiner ist, als der Minimalabstand des Quadrates $\mathfrak{Q}$ von der Begrenzung $\mathfrak{L}$, teile $\mathfrak{Q}$ in m_0^2 Quadrate von der Seitenlänge δ_0 und überziehe daran anschließend den

[1]) Math. Ann. 68 (1910), S. 423.

Bereich $\mathfrak{B}$ mit einem Netz solcher Quadrate. Von diesen vereinige man alle an $\mathfrak{Q}$ unmittelbar anliegenden (offenbar randpunktfreien, also ausschließlich aus Innenpunkten von $\mathfrak{B}$ bestehenden) mit $\mathfrak{Q}$, ebenso alle randpunktfreien, die mit den letzteren oder mit bereits angeschlossenen längs einer Seite zusammenhängen, und setze dieses Verfahren so lange fort, bis es durch das Auftreten anliegender randpunkthaltiger Quadrate gehemmt wird. Man gewinnt auf diese Weise ein erstes von lauter Innenpunkten des Bereiches $\mathfrak{B}$ erfülltes und begrenztes Treppenpolygon $\mathfrak{T}_0$, das ringsum von daran anliegenden randpunkthaltigen Quadraten umgeben ist. Aus den betreffenden Randpunkten kann man dann wieder, gerade so wie beim Beweise des Hauptsatzes von Nr. 2, eine in bestimmter Weise geordnete endliche Menge ausgezeichneter Randpunkte herausheben, und das in dieser Weise begonnene Verfahren läßt sich ganz analog, wie in Nr. 2 ausführlich beschrieben, unbegrenzt fortsetzen. Daraus ergibt sich dann unmittelbar die Richtigkeit der oben ausgesprochenen Behauptung.

§ 2. Der Jordansche Kurvensatz.

1. Unter einer Jordanschen Kurve verstehen wir, wie üblich, eine doppelpunktlose stetige Parameterkurve, also eine Punktmenge, deren rechtwinklige Koordinaten definiert sind durch zwei Gleichungen von der Form:

$$(1) \qquad x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

unter $\varphi(t)$, $\psi(t)$ eindeutige und stetige Funktionen der reellen Veränderlichen t etwa für $t_0 \leqq t \leqq T$ verstanden, die überdies der Bedingung genügen, daß nicht gleichzeitig:

$$(2) \qquad \varphi(t_1) = \varphi(t_2), \quad \psi(t_1) = \psi(t_2), \quad \text{wenn: } t_1 \neq t_2.$$

Besteht bezüglich dieser letzteren Bedingung die eine Ausnahme:

$$(3) \qquad \varphi(t_0) = \varphi(T), \quad \psi(t_0) = \psi(T),$$

so heißt die betreffende Jordansche Kurve geschlossen, im entgegengesetzten Falle offen.

Wie aus der vorstehenden Definition unmittelbar erkannt wird, fällt jede geschlossene Jordansche Kurve unter den in Nr. 2 des vorigen Paragraphen festgelegten Begriff einer zyklisch zusammenhängenden Punktmenge mit Hinzunahme ihrer Grenzpunkte, also eines linienhaften Kontinuums nach Art der äußeren Berandung eines Bereiches $\mathfrak{B}$. Diejenige Eigenschaft, die sie aus dem allgemeinen Typus solcher Kontinua heraushebt, besteht dann darin, daß ihre Grenzpunkte keine besonderen (d. h. die Punkte der abzählbaren zyklischen Menge nicht enthaltenden) Kontinua bilden und demgemäß auch keine besonderen Bereiche begrenzen können, daß vielmehr jede geschlossene Jordansche Kurve die Ebene in genau zwei getrennte Gebiete zerlegt. Dem Beweise dieser den Inhalt des „Jordanschen Kurvensatzes" bildenden Aussage schicken wir zunächst zwei Hilfssätze voraus.

2. Hilfssatz I. Eine zusammenhängende Punktmenge $\mathfrak{P}$, welche ausschließlich aus Punkten einer die Punkte p_0 und P verbindenden Jordanschen Kurve $\mathfrak{C}$ besteht und Punkte in beliebiger Nähe von p_0 und P enthält, ist nach Hinzunahme ihrer Häufungspunkte mit der Kurve $\mathfrak{C}$ identisch.

Beweis. Es sei Gl. (1) die Gleichung der Kurve $\mathfrak{C}$ und

(4) $$p_0 \equiv (\varphi(t_0), \psi(t_0)), \quad T \equiv (\varphi(T), \psi(T)).$$

In Folge der Stetigkeit von $\varphi(t)$, $\psi(t)$ gehört dann auch jeder Grenzpunkt der Menge $\mathfrak{P}$ der Kurve $\mathfrak{C}$ an, mit anderen Worten, auch die aus $\mathfrak{P}$ durch Hinzufügung der Grenzpunkte hervorgehende abgeschlossene Menge $\overline{\mathfrak{P}}$ besteht ausschließlich aus Punkten von $\mathfrak{C}$.

Es ist nun zu zeigen, daß auch umgekehrt jeder Punkt von $\mathfrak{C}$ der Menge $\overline{\mathfrak{P}}$ angehört. Dies gilt zunächst ohne weiteres für die Punkte p_0 und P, da sie ja auf Grund der Voraussetzung Grenzpunkte der Menge $\mathfrak{P}$ sind.

Es bedeute ferner τ einen ganz beliebigen, dem Intervall $t_0 < \tau < T$ angehörigen Parameterwert, von dem noch nicht feststeht, daß er einen zu $\overline{\mathfrak{P}}$ gehörigen Punkt liefert,

und es mögen andererseits diejenigen Parameterwerte, von denen diese Eigenschaft feststeht, generell mit t' bzw. mit t'' bezeichnet werden, je nachdem sie kleiner oder größer als τ sind, sodaß also:

(5) $$t_0 \leqq t' < \tau, \quad \tau < t'' \leqq T.$$

Die t' haben dann eine obere Grenze $\overline{t'}$, die t'' eine untere Grenze $\underline{t''}$, und zwar folgt aus Ungl. (5), daß:

(6) $$\overline{t'} \leqq \tau \leqq \underline{t''}.$$

Da nun die Punktmenge $\overline{\mathfrak{P}}$ eine abgeschlossene ist, so müssen die Punkte $(\varphi(\overline{t'}), \psi(\overline{t'}))$ und $(\varphi(\underline{t''}), \psi(\underline{t''}))$ ihr angehören. Da sie zugleich eine zusammenhängende ist und andererseits zwischen t' und t'' keine Parameterwerte existieren sollen, welche Punkte von $\mathfrak{P}$ liefern, so müssen jene beiden Punkte zusammenfallen[1]). Daraus folgt aber auf Grund der Bedingung (2), daß $\overline{t'} = \underline{t''}$ sein muß und daß daher mit Berücksichtigung von Ungl. (6) sich schließlich ergibt:

$$\overline{t'} = \tau = \underline{t''},$$

d. h. daß in der Tat jeder beliebige Punkt $(\varphi(\tau), \psi(\tau))$, falls $t_0 < \tau < T$, der Menge $\overline{\mathfrak{P}}$ angehört. Dieselbe ist somit, wie behauptet, mit der Kurve $\mathfrak{C}$ identisch.

Zusatz. Tritt an die Stelle der offenen Jordanschen Kurve eine geschlossene, so läßt sich der vorstehende Satz in folgender Weise modifizieren:

Zerlegt man eine geschlossene Jordansche Kurve $\mathfrak{C}$ durch zwei beliebige ihrer Punkte p_0 und P in zwei

---

[1]) Der fragliche Zusammenhang kann nicht etwa dadurch hergestellt sein, daß die beiden zu den Parameterintervallen $[t_0, \overline{t'}]$ und $[\underline{t''}, T]$ gehörigen Abschnitte von $\mathfrak{C}$ in irgend einem Punkte zusammenhängen, der zu einem von $\overline{t'}$ bzw. $\underline{t''}$ verschiedenen Parameterwerte gehört. Denn jene beiden Abschnitte von $\mathfrak{C}$ müßten, falls $\overline{t'} < \underline{t''}$ angenommen wird, als abgeschlossene Punktmengen einen bestimmten Minimalabstand haben, der nicht Null sein kann, da andernfalls $\mathfrak{C}$ einen Doppelpunkt besitzen würde.

Abschnitte und sind $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ zwei zusammenhängende Punktmengen, deren eine ausschließlich aus Punkten des einen, die andere aus solchen des anderen Abschnittes besteht und deren jede Punkte in beliebiger Nähe von p_0 und P enthält, so ist die Vereinigungsmenge der Mengen $\overline{\mathfrak{P}}_1$, $\overline{\mathfrak{P}}_2$ und ihrer Grenzpunkte mit $\mathfrak{C}$ identisch.

Denn auf Grund des vorstehenden Satzes folgt, daß von den beiden abgeschlossenen Mengen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ die eine mit dem einen, die andere mit dem anderen Abschnitt von $\mathfrak{C}$ identisch ist.

3. Hilfssatz II. Eine offene Jordansche Kurve kann niemals die vollständige Begrenzung eines im Endlichen gelegenen Bereiches $\mathfrak{B}$ bilden.

Beweis. Angenommen, das Gegenteil sei der Fall: dann läßt sich nach dem Satze am Schlusse von § 1, Nr. 4 aus den Randpunkten von $\mathfrak{B}$, also aus den Punkten von $\mathfrak{C}$ eine zyklisch zusammenhängende Menge $\lim\limits_{\nu \to \infty} \{P_{n_\nu}^{(\nu)}\}$ herausheben, die von innen durch eine Folge sich gegenseitig umschließender Treppenpolygone beliebig approximiert werden kann. Wir bilden aus dieser zyklischen Punktmenge in folgender Weise zwei gesonderte Mengen. Es sei (mit Beibehaltung der beim Beweise des Hauptsatzes von § 1, Nr. 2 benützten Bezeichnungen) $\{P_{n_0}^{(0)}\}$ die erste Menge der Mengenfolge $\{P_{n_\nu}^{(\nu)}\}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ und $P_{m_0}^{(0)}$ (wo $m_0 > 1$) ein beliebiger Punkt derselben. Wir bilden aus der Anfangsmenge $\{P_{n_0}^{(0)}\}$ die beiden Mengen:

$$\begin{array}{l} P_1^{(0)} \quad P_2^{(0)} \quad , \ldots P_{m_0}^{(0)} \\ P_{m_0}^{(0)} \quad P_{m_0+1}^{(0)}, \ldots P_{n_0}^{(0)} \end{array}$$

(wo also das Glied $P_{m_0}^{(0)}$ zweimal auftritt). Nach dem beim Beweise des Satzes von § 1, Nr. 2 entwickelten Verfahren schließt sich dann an jede dieser Mengen eine unbegrenzte Folge von Mengen an:

$$\begin{array}{ll} P_1^{(\nu)}, P_2^{(\nu)}, \ldots P_{m_\nu}^{(\nu)}, & \text{wo: } P_1^{(\nu)} = P_1^{(0)}, \quad P_{m_\nu}^{(\nu)} = P_{m_0}^{(0)} \\ P_{m_\nu}^{(\nu)}, P_{m_\nu+1}^{(\nu)}, \ldots P_{n_\nu}^{(\nu)} & \phantom{\text{wo: }} P_{m_\nu}^{(\nu)} = P_{m_0}^{(0)}, \lim\limits_{\nu \to \infty} P_{n_\nu}^{(\nu)} = P_1^{(0)} \end{array} \Bigg\} (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Jede der beiden zugehörigen Vereinigungsmengen ist zusammenhängend. Da sie beide zusammengenommen die zyklisch zusammenhängende Menge $\lim_{\nu \to \infty} \{P_{n_\nu}^{(\nu)}\}$ liefern, welche, wie bemerkt, durch eine Folge sich umschließender, also sich beständig erweiternder Treppenpolygone beliebig approximiert werden kann, so folgt, daß jene beiden aus lauter Punkten von $\mathfrak{C}$ bestehenden Vereinigungsmengen nach Hinzunahme ihrer Grenzpunkte zwei linienhafte Kontinua bilden, welche die zwei Punkte $P_1^{(0)}$, $P_{m_0}^{(0)}$ gemein haben, im übrigen keinesfalls identisch sein können. Diese beiden linienhaften Kontinua müssen dann nach Hilfssatz I mit zwei verschiedenen, die Punkte $P_1^{(0)}$ und $P_{m_0}^{(0)}$ verbindenden Bögen der Jordanschen Kurve $\mathfrak{C}$ zusammenfallen, die letztere muß also geschlossen sein.

Zusatz. Da jeder zusammenhängende Teil einer (offenen oder geschlossenen) Jordanschen Kurve eine offene Jordansche Kurve ist, so folgt: Bildet eine Jordansche Kurve die vollständige Begrenzung eines im Endlichen gelegenen Bereiches, so kann keiner ihrer Teile einen anderen Bereich begrenzen.

4. Hauptsatz. Eine geschlossene Jordansche Kurve $\mathfrak{C}$ zerlegt die Ebene in zwei und nur zwei getrennte Gebiete.

Beweis. Es sei A ein am weitesten nach links, B ein am weitesten nach rechts gelegener Punkt von $\mathfrak{C}$. Diese beiden Punkte zerlegen die Kurve in zwei Bögen, einen unteren und einen oberen, die wir durch Ansetzen beliebig (insbesondere beliebig klein) zu denkender horizontaler Strecken $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ nach links bzw. nach rechts verlängern. Hierdurch wird der Charakter jener beiden Bögen als offene Jordansche Kurven nicht geändert.

Wir denken uns nun durch die Punkte A' und B' zwei nach beiden Seiten unbegrenzte Vertikalen $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ gezogen und gehen darauf aus zu zeigen, daß jeder der beiden Kurvenbögen

$\widetilde{A'A}\ldots\widetilde{BB'}$, die wir mit $\mathfrak{C}_1'$, $\mathfrak{C}_2'$ bezeichnen wollen, den so entstandenen unendlichen Parallelstreifen in zwei getrennte Gebiete zerlegt. Hierzu wenden wir dasjenige Verfahren an, welches in § 1, Nr. 2 zur Approximation der äußeren Berandung eines Bereiches durch eine Folge von Treppenpolygonen diente, auf einen jener beiden Kurvenbögen, etwa den unteren $\mathfrak{C}_1$ an.

Wir schließen also den letzteren zunächst in ein Quadrat, dann in einen quadratischen Ring von Teilquadraten und, von diesem ausgehend, in ein Treppenpolygon $\mathfrak{T}_0$ ein, dem wir wieder eine bestimmte endliche Menge $\{P_{n_0}^{(0)}\}$ von „ausgezeichneten Randpunkten", d. h. von Punkten des Bogens $\mathfrak{C}_1'$ zuordnen. Bei weiterer Fortsetzung des a. a. O. beschriebenen Verfahrens ergibt sich dann wieder eine unbegrenzte Folge in einander liegender Treppenpolygone $\mathfrak{T}_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$), welche den Kurvenbogen $\mathfrak{C}_1'$, immer enger umschließen, dazu eine gleichfalls unbegrenzte Folge sich beständig verdichtender endlicher Mengen $\{P_{n_\nu}^{(\nu)}\}$ von $\mathfrak{C}_1'$-Punkten, denen jene Treppenpolygone unbegrenzt näher rücken, ohne jemals einen dieser Punkte zu erreichen. Wir treffen nun die weitere Verfügung, daß bei allen möglichen $\mathfrak{T}_\nu$ die beiden äußersten Vertikalseiten durch entsprechende Stücke der beiden Grenzvertikalen $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ ersetzt werden sollen. Dadurch gelangen die beiden $\mathfrak{C}_1'$-Punkte A' und B' auf die Begrenzung aller $\mathfrak{T}_\nu$, während im übrigen keinerlei wesentliche Änderung eintritt. Werden jetzt die beiden (neu geschaffenen) äußersten Vertikalseiten der $\mathfrak{T}_\nu$ wieder ausgeschaltet, so zerfällt jedes $\mathfrak{T}_\nu$ in zwei Treppenwege, einen unteren $\underline{\mathfrak{t}}_\nu$ und einen oberen $\overline{\mathfrak{t}}_\nu$. Zugleich zerfällt auch jede der Punktmengen $\{P_{n_\nu}^{(\nu)}\}$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) in zwei solche, deren eine dem Treppenwege $\underline{\mathfrak{t}}_\nu$, die andere dem Treppenwege $\overline{\mathfrak{t}}_\nu$ zugeordnet ist und die beide zwischen $\underline{\mathfrak{t}}_\nu$ und $\overline{\mathfrak{t}}_\nu$ verlaufen. Die Vereinigungsmenge einer jeden dieser beiden Punktmengenfolgen mit Hinzunahme ihrer Grenzpunkte (zu denen auch A' und B' gehören) muß dann nach Hilfssatz I mit $\mathfrak{C}_1'$ identisch sein. Da andererseits jedes $\underline{\mathfrak{t}}_\nu$

und jedes $\mathfrak{t}_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) den von $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ begrenzten Parallelstreifen in zwei und nur zwei getrennte Gebiete, ein Untergebiet und ein Obergebiet, zerlegt, so gilt das gleiche von $\mathfrak{C}_1'$, da ja auf Grund von Hilfssatz II bereits feststeht, daß nicht etwa ein Teil von $\mathfrak{C}_1'$ ein Sondergebiet begrenzen könnte.

Ebenso ergibt sich, daß auch der (abgesehen von den Strecken $\overline{A'A}$ und $\overline{BB'}$) vollständig dem Obergebiet von $\mathfrak{C}_1'$ angehörige obere Kurvenbogen $\mathfrak{C}_2'$ den Parallelstreifen in zwei Gebiete zerlegt. Dabei können die zwei durch $\mathfrak{C}_1'$ und $\mathfrak{C}_2'$ hervorgebrachten Zerlegungen nicht identisch sein, da sonst $\mathfrak{C}_1'$ und $\mathfrak{C}_2'$ identisch sein müßten. Es muß daher ein Teil des Obergebietes von $\mathfrak{C}_1'$ mit einem Teil des Untergebietes von $\mathfrak{C}_2'$ zusammenfallen, und es wird daher der Parallelstreifen durch die beiden Bögen $\mathfrak{C}_1'$ und $\mathfrak{C}_2'$ in drei Stücke zerlegt, von denen die beiden äußeren sich ins Unendliche erstrecken, das mittlere, gleichzeitig von $\mathfrak{C}_1'$ und $\mathfrak{C}_2'$ begrenzte, ganz im Endlichen liegt. Denkt man sich jetzt die beiden Ansatzstücke $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$, sowie die beiden Vertikalen $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ ausgeschaltet und die beiden Bögen von $\mathfrak{C}$, die nach Wegnahme der Strecken $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ mit $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ bezeichnet werden mögen, zu der geschlossenen Kurve $\mathfrak{C}$ zusammengefaßt, so zerlegt die letztere die Ebene in genau zwei getrennte Punktmengen, eine äußere, von der bereits feststeht, daß sie ein einziges zusammenhängendes (übrigens sich ins Unendliche erstreckendes) Gebiet bildet, und eine innere, von der noch zu zeigen ist, daß sie gleichfalls ein einziges zusammenhängendes Gebiet bildet. Dazu ist nur der Nachweis erforderlich, daß zwei beliebige, im Innern von $\mathfrak{C}$ liegende Punkte P, P' durch eine ganz im Innern von $\mathfrak{C}$ verlaufende gebrochene Linie verbunden werden können.

Wir bemerken zunächst, daß durch die vorstehende Betrachtung für jeden der beiden Kurvenbögen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ eine bestimmte Seite als untere, die andere als obere festgelegt ist. Insbesondere hat diejenige Seite des (unteren) Kurvenbogens $\mathfrak{C}_1$, an welche die im Inneren von $\mathfrak{C}$ liegenden Punkte angrenzen, als obere zu gelten.

Da der Punkt P einen gewissen von Null verschiedenen Minimalabstand von $\mathfrak{C}$ besitzen muß, so läßt er sich mit einem ganz aus Innenpunkten von $\mathfrak{C}$ bestehenden Quadrat umgeben, von dem ausgehend man nach der Vorschrift von § 1, Nr. 4 eine unbegrenzte Folge ganz von Innenpunkten der Kurve $\mathfrak{C}$ erfüllter und begrenzter, sich gegenseitig umschließender Treppenpolygone $\mathfrak{T}_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) nebst einer entsprechenden Folge endlicher Mengen $\{P_{n_\nu}^{(\nu)}\}$ von „ausgezeichneten" Randpunkten, d. h. $\mathfrak{C}$-Punkten herstellen kann, denen jene Treppenpolygone unbegrenzt näher rücken. Die beim Beweise des Hilfssatzes II angewendete Schlußweise zeigt dann, daß die (wiederum zyklisch zusammenhängende) Vereinigungsmenge $\lim\limits_{\nu \to \infty} \{P_{n_\nu}^{(\nu)}\}$ nach Hinzunahme ihrer Grenzpunkte mit der Kurve $\mathfrak{C}$ identisch sein muß. Bei dem obigen Verfahren muß nun unter den ausgezeichneten $\mathfrak{C}$-Punkten einmal ein erster auftreten, der (von A und B verschieden) dem unteren Bogen $\mathfrak{C}_1$ angehört. Er werde mit P_1, der auf der zugeordneten Quadratseite des entsprechenden Treppenpolygons, etwa $\mathfrak{T}_m$, ihm gegenüber liegende mit Q bezeichnet. Die Strecke $\overline{QP_1}$ liegt dann, abgesehen von dem Punkte P, ganz im Innern von $\mathfrak{C}$. Da sich andererseits der Punkt P mit Q durch einen im Innern von $\mathfrak{T}_m$, also auch von $\mathfrak{C}$ verlaufenden Streckenzug verbinden läßt, so liefert der Streckenzug $\overline{PQP_1}$ eine im Innern von $\mathfrak{C}$ verlaufende Verbindung von P mit der oberen Seite von $\mathfrak{C}_1$.

Genau in derselben Weise läßt sich auch für den Punkt P' eine analoge Verbindung $\overline{P'Q'P_1'}$ mit einem Punkte P_1' der oberen Seite von $\mathfrak{C}_1$ herstellen.

Nun läßt sich aber die obere Seite von $\mathfrak{C}_1$ durch die im ersten Teil des vorliegenden Beweises mit $\bar{\mathfrak{t}}_\nu$ bezeichneten Treppenwege in der Weise approximieren, daß jeder Punkt des Treppenweges einen beliebig klein vorzuschreibenden Abstand von $\mathfrak{C}_1$ hat. Da das Bogenstück $\widehat{P_1 P_1'}$ von dem oberen Kurvenbogen $\mathfrak{C}_2$ einen gewissen Minimalabstand hat, so muß

bei hinlänglich großem ν der Treppenweg $\mathfrak{t}_\nu$ die Strecken $\overline{Q P_1}$, $\overline{Q' P'_1}$ nahe bei P_1 bzw. P'_1 in zwei Punkten Q_1 bzw. Q'_1 treffen und das Wegstück $\overline{Q_1 Q'_1}$ dem Untergebiete von $\mathfrak{C}_2$ angehören, also im Innern von $\mathfrak{C}$ liegen Der aus $\overline{P Q Q_1 Q'_1 Q' P'}$ bestehende Streckenzug liefert dann eine im Innern von $\mathfrak{C}$ verlaufende Verbindung von P und P'.

Damit ist der ausgesprochene Satz bewiesen.

Zur topologischen Untersuchung geometrischer Gebilde.

Von H. Künneth in Erlangen.

Vorgelegt von W. v. Dyck in der Sitzung am 17. Juni 1922.

Die einfachsten unterscheidenden Merkmale mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten sind vom Standpunkt der Analysis situs aus die als „Bettische Zahlen"[1]) bekannten Zusammenhangszahlen. In meiner Dissertation[2]) habe ich bewiesen, wie man für gewisse Mannigfaltigkeiten, die durch eine Art Produktbildung[3]) aus gegebenen Mannigfaltigkeiten entstanden sind, die Bettischen Zahlen mittelst einer einfachen Formel berechnen kann, wenn die Bettischen Zahlen der Faktoren bekannt sind, und habe gezeigt, wie man ein vollständiges System durch keine Homologie verbundener, geschlossener, orientierbarer Mannigfaltigkeiten in der Produktmannigfaltigkeit finden kann, wenn solche Systeme in den Faktoren bekannt sind.

Ich will hier einige der dort gemachten Anwendungen der Formel mitteilen auf Mannigfaltigkeiten, wie sie sich an anderen Stellen der Literatur vorfinden. Der Satz selbst lautet:

Sind P_p^α, bzw. P_p^β die Bettischen Zahlen p-ter Dimension einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit A, bzw. einer m-dimen-

---

[1]) Nach der zweiten Definition Poincarés, „Compl. à l'analysis situs", Rend. del Circ. Mat. di Palermo, t. XIII, a. 1899, S. 286 f.

[2]) „Über die Bettischen Zahlen einer Produktmannigfaltigkeit." Diss. Erlangen 1922.

[3]) S. Steinitz, „Beiträge zur Analysis Situs", Sitz.-Ber. d. Berl. Math. Gesellsch., 7. Jahrg. 1908, S. 42 ff. (Archiv d. Math. u. Phys., III. Reihe, Band 13).

sionalen Mannigfaltigkeit B, so findet man die Bettische Zahl P_l^γ l-ter Dimension der Produkmannigfaltigkeit $C = AB$ aus:

$$P_l^\gamma - 1 = \sum_{p=0}^{n} (P_p^\alpha - 1)(P_{l-p}^\beta - 1) \quad [l = 1, \ldots (n+m-1)]. \quad (1)$$

Dabei sind folgende Festsetzungen getroffen:

Für jede n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist $P_p = 1$, wenn $p < 0$ oder $p > n$. Für jede n-dimensionale zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist: $P_0 = 2$ und, wenn sie geschlossen orientierbar ist, $P_n = 2$, wenn sie berandet oder nicht orientierbar, geschlossen ist, $P_n = 1$. Diese Festsetzungen sind wegen ihrer Zweckmäßigkeit für den vorliegenden Fall gemacht worden, ergeben sich aber auch, wenn man die formale Definition der Bettischen Zahlen nach der zweiten Art Poincares auf alle Werte von p anwendet.

Ist C das Produkt von mehr als 2 Faktoren, $C = A_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_n$, so findet man die Bettischen Zahlen von C durch wiederholte Anwendung von (1) aus:

$$P_k^\gamma - 1 = \sum_{\substack{k_1, k_2 \ldots k_n \\ k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k}} (P_{k_n}^n - 1)(P_{k_{n-1}}^{n-1} - 1) \ldots (P_{k_2}^2 - 1)(P_{k_1}^1 - 1), \quad (2)$$

wobei der untere Index eines jeden P die Dimension, der obere die zugehörige Mannigfaltigkeit bezeichnet.

1. Als Anwendung von (1) ergibt sich für den Fall der Torusfläche, dem Produkt zweier Kreise A und B, aus $P_0^\alpha = P_1^\alpha = P_0^\beta = P_1^\beta = 2$:

$$P_1^\gamma = (P_0^\alpha - 1)(P_1^\beta - 1) + (P_1^\alpha - 1)(P_0^\beta - 1) + 1 = 3.$$

2. Wenden wir uns nun den von Steinitz angeführten Beispielen von Produktmannigfaltigkeiten zu. Das eine ist die fünfdimensionale Mannigfaltigkeit der reellen Flächenelemente im projektiven dreidimensionalen Raume $\mathfrak{R}_3$, wobei unter einem Flächenelement die Kombination einer Ebene mit einem auf ihr liegenden Punkt zu verstehen ist. Die Faktoren dieser

Mannigfaltigkeit sind die projektive Ebene[1]); d. h. eine nicht orientierbare geschlossene zweidimensionale Mannigfaltigkeit, für welche $P_1 = 1$, und der projektive Raum $\mathfrak{R}_3$, d. h. eine orientierbare geschlossene, dreidimensionale Mannigfaltigkeit, für welche $P_1 = P_2 = 1$ ist. Für die Produktmannigfaltigkeit erhält man dann:

$$P_1 = P_2 = P_4 = P_5 = 1; \quad P_3 = 2$$

3. Das zweite von Steinitz angeführte Beispiel einer Produktmannigfaltigkeit liefert die komplexe Punktmannigfaltigkeit einer Fläche 2. Grades und die durch die gleiche Produktmannigfaltigkeit darstellbare Mannigfaltigkeit der reellen, mit Richtungssinn versehenen Geraden im $\mathfrak{R}_3$. Beide Mannigfaltigkeiten sind vom Typus des Produktes zweier Kugelflächen. Dieselbe Mannigfaltigkeit finden wir auch bei Study[2]) in „Beiträgen zur nicht-euklidischen Geometrie“. Nach Study läßt sich das Kontinuum aller reellen Speere im elliptischen (oder sphärischen) Raum überall eindeutig und stetig abbilden auf das Kontinuum aller reellen Paare von Punkten, die man 2 Kugeln (des reellen euklidischen Raumes) vom Radius 1 entnehmen kann[3]). Das Kontinuum dieser Punktpaare läßt sich wieder eindeutig und stetig abbilden auf das Kontinuum der Punkte der aus den beiden Kugeln gebildeten vierdimensionalen Produktmannigfaltigkeit C. In diesem Falle sind A und B Kugelflächen, also $P_1^\alpha = P_1^\beta = 1$. Aus (1) ergeben sich dann für C die Bettischen Zahlen:

$$P_1^\gamma = 1; \quad P_2^\gamma = 3; \quad P_3^\gamma = 1.$$

Es gibt also, da $P_2^\gamma - 1 = 2$ ist, 2 Arten von geschlossenen orientierbaren, unabhängigen zweidimensionalen Mannig-

---

[1]) Nach dem Dualitätsprinzip ist die Mannigfaltigkeit aller Flächenelemente (Ebenen) durch einen Punkt X des $\mathfrak{R}_3$ gleichwertig der Mannigfaltigkeit aller Geraden durch X und daher durch Perspektivität gleichwertig der Mannigfaltigkeit aller Punkte einer Ebene.

[2]) American Journal of Mathematics, vol. XXIX, 1907.

[3]) Ebenda, S. 121.

faltigkeiten in C, die nicht homolog Null sind, und zwar sind dies die Produkte von A mit Punkten aus B und die Produkte von B mit Punkten aus A. Im elliptischen Raum ergeben diese zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten Speerkongruenzen; es sind die „rechts-, bzw. links-syntaktischen Kongruenzen“ Studys[1]). Die Geraden, auf welchen diese Speere liegen, bilden Strahlennetze ohne (reelle) Leitstrahlen. Diese zweierlei Arten von geschlossenen Mannigfaltigkeiten in C, die sich nicht durch stetige Transformation auf einen Punkt zusammenziehen lassen, liefern im elliptischen Raum die linksseitigen und rechtsseitigen Schiebungen. Bei der komplexen Punktmannigfaltigkeit einer Fläche 2. Grades, die ja auch C äquivalent ist, entspricht jeder geschlossenen Mannigfaltigkeit der einen oder der anderen Art die zweidimensionale komplexe Punktmenge einer Erzeugenden der einen oder der anderen Schar.

4. Kehren wir nun wieder zum Beispiel Studys zurück und betrachten auch den Fall, wo das Komplexe in die Untersuchung miteinbegriffen wird. Je nach der Art der zu Grunde gelegten Definition für die komplexen Speere erhält man zwei verschiedene Kontinua. Study unterscheidet deshalb zwischen „Speeren“ und „Pfeilen“. Die reellen und komplexen Speere sind gerichtete Gerade, die zwei, einen oder unendlich viele Punkte mit der absoluten Fläche gemeinsam haben[2]). Die reellen und komplexen Pfeile werden dagegen eindeutig dargestellt durch die Paare von Punkten auf der absoluten Fläche[2]), wobei auch die verschiedene Reihenfolge der Punkte innerhalb eines Paares zu unterscheiden ist, oder durch das achtdimensionale Kontinuum aller Quadrupel reeller Punkte, die man einzeln vier reellen Kugelflächen entnehmen kann[3]). Dieses Kontinuum läßt sich aber wieder eindeutig und stetig abbilden auf das Kontinuum der Punkte der aus den vier Kugelflächen gebildeten Produktmannigfaltigkeit C.

---

[1]) Study, a. a. O., S. 132.
[2]) Study, a. a. O., S. 157.
[3]) Study, a. a. O., S. 158.

Nach (2) ergibt sich für die Bettischen Zahlen von C:

$$P_1 = P_7 = 1;\ P_2 = P_6 = 5;\ P_3 = P_5 = 1;\ P_4 = 7.$$

5. Eine Verallgemeinerung der Produktmannigfaltigkeit zweier Kugelflächen, d. h. also zweier zweidimensionaler sphärischer Mannigfaltigkeiten auf die Produktmannigfaltigkeiten zweier sphärischer Mannigfaltigkeiten höherer Dimension findet sich bei Poincaré in seiner ersten Arbeit über „Analysis situs“ [1]. Er bespricht dort als 8. Beispiel eine Mannigfaltigkeit W von $(2q-2)$ Dimensionen im $2q$-dimensionalen Raum, die durch folgende Gleichungen in den inhomogenen Koordinaten y_i, z_i gegeben ist:

$$\text{(a)} \qquad y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_q^2 = 1,$$

$$\text{(b)} \qquad z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_q^2 = 1.$$

Diese Mannigfaltigkeit ist vom Typus eines Produktes aus zwei $(q-1)$ dimensionalen sphärischen Mannigfaltigkeiten. Betrachtet man nämlich (a) und (b) als die Gleichungen je einer sphärischen $(q-1)$ dimensionalen Mannigfaltigkeit A bzw. B im q-dimensionalen Raum, so entspricht jedem Punktpaar aus A und B, wobei immer ein Punkt des Paares aus A, der andere aus B zu entnehmen ist, umkehrbar eindeutig ein Punkt von W. Es ist also W gleichwertig dem Produkte $A \cdot B$, und da für jede $(q-1)$ dimensionale sphärische Mannigfaltigkeit $P_p = 1$, wenn $0 < p < q-1$, und $P_0 = P_{q-1} = 2$, so ergibt sich für die Bettischen Zahlen von W aus (1) [2]:

$$P_p = 1 \text{ für } 0 < p < q-1 \text{ und } q-1 < p < 2q-2;\quad P_{q-1} = 3.$$

Zwei voneinander unabhängige geschlossene, zweiseitige, $(q-1)$ dimensionale Mannigfaltigkeiten, die nicht homolog Null sind, werden dabei erhalten durch das Produkt von A mit einem Punkte von B, bzw. durch das Produkt von B mit einem Punkte von A.

---

[1] Journal de l'école polyt., 2. sér., cah. 1, S. 88.

[2] Poincaré kommt zu dem gleichen Ergebnis auf anderem Wege, a. a. O., S. 96 f.

6. Es seien jetzt einige Mannigfaltigkeiten betrachtet, wie sie bei W. v. Dyck in den „Beiträgen zur Analysis situs" auftreten[1]). Dyck hat dort ein Verfahren gezeigt, wie man jede, im reellen projektiven $\mathfrak{R}_{n+1}$ gelegene n-dimensionale Mannigfaltigkeit 2. Grades M_n^2, die bei Verwendung homogener Koordinaten gegeben sei durch die Gleichung:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_\nu^2 - x_{\nu+1}^2 - x_{\nu+2}^2 - \cdots - x_{n+1}^2 - x_{n+2}^2 = 0$$
$$[\nu < n+1]$$

ein = eindeutig abbilden kann auf eine Mannigfaltigkeit N_n, die gegeben ist durch:

$$F = \left(\sum_{i=1}^{n+1} \xi_i^2\right)^2 - a^2 \xi_{n+1}^2 \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i^2 < 0 \qquad a > 2$$

(in homogenen Koordinaten im $\mathfrak{R}_n$).

Die durch $F \leqq 0$ bestimmte berandete Mannigfaltigkeit sei mit $\overline{N}_n$, ihre durch die Gleichung $F = 0$ gegebene Berandung mit R_{n-1} bezeichnet. Die Bettischen Zahlen von $\overline{N}_n$ und R_{n-1} sollen berechnet werden. Es sei noch folgendes bemerkt: Für die im projektiven Sinn im Unendlichen geschlossene M_n^2 würde man eine ein = eindeutige Abbildung erhalten durch eine Mannigfaltigkeit N_n, die aus $\overline{N}_n$ entsteht, wenn man die Punkte der Berandung R_{n-1}, die den uneigentlichen Punkten von M_n^2 entsprechen, in bestimmter Weise paarweise als inzident betrachtet[2]).

Die Mannigfaltigkeiten $\overline{N}_n$ und R_{n-1} sind nun, wie die Dyckschen Betrachtungen zeigen, darstellbar als Produktmannigfaltigkeiten, und zwar ist $\overline{N}_n$ äquivalent dem Produkt einer $(\nu - 1)$ dimensionalen sphärischen Mannigfaltigkeit[3]) $S_{\nu-1}$ mit einer $(n - \nu + 1)$ dimensionalen Elementar-Mannigfaltigkeit

[1]) Mathematische Annalen, Bd. 37, S. 284 ff. und S. 308 ff.

[2]) Dyck, a. a. O., S. 309.

[3]) Die sphärische 0-dimensionale Mannigfaltigkeit ist dabei das Punktepaar, die geschlossene zusammenhängende 0-dimensionale Mannigfaltigkeit der einzelne Punkt.

$E_{n-\nu+1}$, und R_{n-1} ist äquivalent dem Produkte von $S_{\nu-1}$ mit der sphärischen Berandung $S_{n-\nu}$ von $E_{n-\nu+1}$. Auch für $\nu = n+1$ läßt sich eine entsprechende Produktmannigfaltigkeit $\overline{N}_n$ bilden. Eine R_{n-1} ist in diesem Falle nicht vorhanden. $\overline{N}_n$ ist dann identisch mit M_n^2.

Für die Bettischen Zahlen von $\overline{N}_n$ erhält man nach (1)

$$P_l = 1, \text{ für } l \neq \nu - 1; \quad P_{\nu-1} = 2$$

und für die Bettischen Zahlen von R_{n-1}:

wenn $\nu \neq \frac{n+1}{2}$: $P_l = 1$, für $l \neq \nu - 1,\ n-\nu$; $P_{\nu-1} = P_{n-\nu} = 2$,

wenn $\nu = \frac{n+1}{2}$: $P_l = 1$, für $l \neq \frac{n-1}{2}$; $P_{\frac{n-1}{2}} = 3$.

Dieselbe Mannigfaltigkeit R_{n-1} erhält man nach Dyck auch als Produkt einer sphärischen $(\nu-1)$ dimensionalen Mannigfaltigkeit $S'_{\nu-1}$ mit einer linearen Mannigfaltigkeit $(n-\nu)$ter Dimension $L_{n-\nu}$, die sich ins Unendliche erstreckt. Faßt man aber alle unendlich fernen Elemente zu einem einzigen Punkt zusammen, so ist $L_{n-\nu}$ äquivalent einer $(n-\nu)$ dimensionalen sphärischen Mannigfaltigkeit $S'_{n-\nu}$, und man erhält dieselbe Bildung von R_{n-1}, wie oben.

Die Gesamtheit der durch $F \geqq 0$ bestimmten Punkte des sphärischen $\mathfrak{R}_n$ sei bezeichnet mit $\overline{N}'_n$. Auch $\overline{N}'_n$ ist vom Typus einer Produktmannigfaltigkeit und zwar äquivalent dem Produkte von $S'_{n-\nu}$ mit der Elementarmannigfaltigkeit E'_ν, deren Berandung $S'_{\nu-1}$ ist.

Die Bettischen Zahlen von $\overline{N}'_n$ sind demnach:

$$P_l = 1, \text{ für } l \neq n - \nu; \quad P_{n-\nu} = 2.$$

Für $\overline{N}_n$, $\overline{N}'_n$ und R_{n-1} wurden von Dyck die Charakteristiken bestimmt[1]). Benützt man zu ihrer Bestimmung die verallgemeinerte Eulersche Polyederformel, die sich unter Berücksichtigung der Festsetzungen, P_0 und P_n betreffend, darstellen läßt durch:

[1]) A. a. O., S. 288 und S. 297.

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (P_i - 1),$$

so erhält man:

für $\overline{N}_n$: 2, wenn ν ungerade; 0, wenn ν gerade,

für $\overline{N}'_n$: 2, wenn $n - \nu$ gerade; 0, wenn $n - \nu$ ungerade,

für R_{n-1}: 0, wenn n gerade, oder wenn n ungerade und ν gerade,

4, wenn n und ν ungerade.

Was nun die Bettischen Zahlen von N_n und damit von M_n^2 betrifft, so hängen diese nicht allein von den Bettischen Zahlen von $\overline{N}_n$ und R_{n-1} ab, sondern auch von der Art der Zuordnung der Elemente von R_{n-1}, die als inzident zu betrachten sind. Doch soll hier auf diese Frage nicht weiter eingegangen werden, da sie besondere Betrachtungen erfordern würde.

Über Gebilde mit einzigem Ordnungsindex.

Von **Artur Rosenthal.**

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 8. Juli 1922.

Jedes Oval wird bekanntlich von irgend einer Geraden der Ebene in *höchstens zwei* Punkten getroffen. Wir stellen nun die Frage: Gibt es in der Ebene geometrische Gebilde, welche von *jeder* Geraden in *genau zwei* Punkten getroffen werden? Solche triviale Figuren, an die man zunächst denken könnte, wie zwei sich schneidende Gerade, leisten natürlich das Gewünschte nicht. Aber man kann mit Benutzung des Wohlordnungssatzes die Existenz jener fraglichen Gebilde nachweisen. Und dasselbe ist möglich, wenn man oben die Zahl 2 durch irgend eine andere Anzahl $n > 1$ ersetzt, oder wenn man von der Ebene zum Raum (oder zu allgemeineren Räumen) übergeht; auch kann man an Stelle der Geraden andere Kurvenscharen und allgemeinere Systeme von analogen Gebilden zu Grunde legen. Ferner ergeben sich, wenn man von den „genau n Schnittpunkten" zu den sonst immer betrachteten „höchstens n Schnittpunkten" zurückkehrt, weitere in gleicher Weise positiv zu beantwortende Existenzfragen, insbesondere die Frage, ob jede beliebige (n enthaltende) Auswahl aus den Zahlen $0, 1, 2, \ldots, n$ als Schnittpunktzahlen geometrischer Gebilde mit den Geraden möglich ist (§ 1). Wir wollen übrigens folgende Bezeichnungsweise benutzen: Bekanntlich heißt ein ebenes Gebilde (eine Kurve) $\mathfrak{C}$ von n-ter *Ordnung*, wenn $\mathfrak{C}$ mit jeder Geraden höchstens n Punkte gemeinsam hat und wenn es wirklich mindestens eine Gerade der Ebene gibt, von der $\mathfrak{C}$

in genau n Punkten getroffen wird. Wir wollen nun die Zahl der Schnittpunkte, in denen $\mathfrak{C}$ von irgend einer Geraden getroffen wird, als einen *„Ordnungsindex“* von $\mathfrak{C}$ bezeichnen. Der größte „Ordnungsindex“ von $\mathfrak{C}$ ist die „Ordnung“ von $\mathfrak{C}$[1]. Und unsere Gebilde, die von jeder Geraden in genau n Punkten getroffen werden, besitzen einen *einzigen* Ordnungsindex, nämlich n.

Die Gebilde mit einzigem Ordnungsindex n können noch wechselnde Eigenschaften besitzen; sie können insbesondere sowohl überall dicht, wie nirgends dicht sein. Stets aber haben dieGebilde von endlicher (oder abzählbarer) Ordnung das innere Maß Null (§ 2). Eine besonders wichtige Frage wird die sein, ob und wann unsere Gebilde *Kontinua* enthalten können. Wir werden hier in dieser Hinsicht im wesentlichen nur die ebenen *Gebilde 2. Ordnung* genauer betrachten, wie wir überhaupt hier nur einen Ausschnitt aus Untersuchungen geben, die nach verschiedenen Richtungen geführt sind und noch weiter verfolgt werden sollen. Für die ebenen Gebilde mit einzigem Ordnungsindex $n = 2$ ist die Existenz eines Teilkontinuums unmöglich; dagegen ist leicht zu sehen, daß für $n \geq 4$ solche Teilkontinua, die sogar in gewissem Umfang vorgeschrieben werden dürfen, auftreten können (§ 3). Weiterhin wird allgemeiner gezeigt (§ 4), daß ebene Kontinua 2. Ordnung stets konvexe Kurven sein müssen und daß solche nur dann in einem ebenen Gebilde 2. Ordnung enthalten sein können, wenn alle Ordnungsindizes 0, 1, 2 gleichzeitig (und zwar sogar in Mächtigkeit $\mathfrak{c}$) vorkommen.

---

[1]) Wenn die Ordnungsindizes nicht, wie oben angenommen, beschränkt sind, so ist die Ordnung als die obere Grenze der Ordnungsindizes zu definieren. Ein Gebilde $\mathfrak{C}$ heißt also dann von n-ter Ordnung, wenn $\mathfrak{C}$ von jeder Geraden in höchstens n Punkten getroffen wird und dabei n nicht verkleinert werden kann.

§ 1. Existenz der Mengen mit einzigem Ordnungsindex n.

Wir wollen zunächst den *Beweis für die Existenz der ebenen Mengen mit einzigem Ordnungsindex* n erbringen, wenn n irgend eine *endliche*[1]) *Anzahl* ≥ 2 ist. Für $n = 1$ ist die Existenz einer derartigen Menge selbstverständlich unmöglich (enthält nämlich eine solche Menge zwei Punkte, so trifft deren Verbindungsgerade die Menge bereits in mindestens 2 Punkten). Wir betrachten also den Fall $n > 1$: Nach dem Wohlordnungssatz existiert eine Wohlordnung der Menge aller Geraden g unserer Ebene $\mathfrak{E}$ und zwar existiert speziell eine Wohlordnung dieser Menge von der Form

$$(1) \qquad g_1, g_2, g_3, \ldots, g_\alpha, \ldots \qquad \alpha < \Omega_\mathfrak{c},$$

wobei $\Omega_\mathfrak{c}$ die kleinste Ordnungszahl ist, die der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ des Kontinuums entspricht, also die Anfangszahl der $\mathfrak{c}$ zugehörigen Zahlenklasse $Z(\mathfrak{c})$. Ferner existiert eine ebensolche wohlgeordnete Reihe der Punkte P von $\mathfrak{E}$, nämlich

$$(2) \qquad P_1, P_2, P_3, \ldots, P_\alpha, \ldots \qquad \alpha < \Omega_\mathfrak{c}.$$

Die ersten n Punkte von (2), die auf g_1 liegen, seien mit

$$(3) \qquad Q_1^1, Q_1^2, \ldots, Q_1^n$$

bezeichnet. Ferner nehmen wir die ersten $(n-1)$ bzw. n Punkte von (2), die auf g_2, aber nicht auf g_1 liegen, je nachdem g_2 durch einen der Punkte (3) hindurchgeht oder nicht; diese Punkte seien:

$$(4) \qquad Q_2^1, Q_2^2, \ldots, Q_2^{n-1}, (Q_2^n).$$

Die Gesamtheit der Verbindungsgeraden aller Punkte von (3) und (4) sei mit Γ_3 bezeichnet[2]). g_3 ist entweder eine Gerade von Γ_3 oder nicht, und in letzterem Fall kann g_3 entweder einen Punkt von (3), (4) enthalten oder nicht; entsprechend diesen Fällen nehme man die ersten $(n-2)$ oder

[1]) Der Beweis ist in gleicher Weise auch giltig, wenn n die Mächtigkeit $\mathfrak{a}$ der abzählbaren Mengen bedeutet.

[2]) Auch g_1 und g_2 gehören zu Γ_3.

$(n-1)$ oder n Punkte von (2), die auf g_3 liegen, aber keiner von g_3 verschiedenen Geraden von Γ_3 angehören:

(5) $$Q_3^1,\ Q_3^2,\ \ldots,\ Q_3^{n-2},\ (Q_3^{n-1},\ Q_3^n).$$

Die Menge der Verbindungsgeraden aller Punkte (3), (4), (5) werde mit Γ_4 bezeichnet. Usw. Allgemein: Es sei $\alpha < \Omega_\mathfrak{c}$; für alle Zahlen $\beta < \alpha$ sollen auf g_β die Punkte

(6) $$Q_\beta^1,\ Q_\beta^2,\ \ldots,\ Q_\beta^{n-2},\ (Q_\beta^{n-1},\ Q_\beta^n)$$

bereits bestimmt sein. Die Gesamtheit der Verbindungsgeraden sämtlicher Punkte (6) für alle Zahlen $\beta < \alpha$ soll mit Γ_α bezeichnet werden. g_α kann eine Gerade von Γ_α sein oder nicht, und in letzterem Fall kann g_α einen der Punkte Q_β enthalten oder nicht; entsprechend diesen Fällen wähle man aus (2) die ersten $(n-2)$ oder $(n-1)$ oder n Punkte

(7) $$Q_\alpha^1,\ Q_\alpha^2,\ \ldots,\ Q_\alpha^{n-2},\ (Q_\alpha^{n-1},\ Q_\alpha^n)$$

aus, die auf g_α liegen, aber keiner von g_α verschiedenen Geraden von Γ_α angehören. Dies ist immer möglich, weil die Schnittpunkte des Systems Γ_α mit g_α eine Menge von geringerer Mächtigkeit als $\mathfrak{c}$ bilden; denn ist $\aleph$ die Mächtigkeit des zu α gehörenden Abschnittes, so ist $\aleph < \mathfrak{c}$ und daher auch

(8) $$(n \cdot \aleph)^2 < \mathfrak{c},$$

also hat auch die Gesamtheit der Geraden von Γ_α eine Mächtigkeit $< \mathfrak{c}$. Wir sind deshalb sicher, daß das Verfahren nicht vor vollständiger Durchlaufung von (1) abbrechen kann. Die Menge $\mathfrak{Q}$ aller Punkte Q_α $(\alpha < \Omega_\mathfrak{c})$ leistet daher das Gewünschte, d. h. sie wird von jeder Geraden der Ebene in genau n Punkten getroffen.

Vom vorstehenden sind zahlreiche Verallgemeinerungen möglich, die wir kurz angeben wollen, wenn wir uns auch in den folgenden Paragraphen nur auf die oben betrachteten ebenen Mengen beschränken werden: Zunächst gilt alles vorige natürlich nicht nur in der Ebene, sondern genau ebenso auch in jedem *3- oder mehrdimensionalen linearen Raum.* Außerdem kann man in analoger Weise verfahren, wenn man *statt der*

Geraden g irgend welche *Scharen K von Kurven* $\mathfrak{K}$ [z. B. Kreisen, Ellipsen und dgl.] betrachtet, derart, daß jedes Individuum $\mathfrak{K}$ durch k seiner Punkte in K bestimmt ist. Es ergibt sich dann *die Existenz von Mengen, die mit jeder Kurve* $\mathfrak{K}$ *unserer Schar K genau n Punkte gemeinsam haben, wenn* $n \geq k$ *ist.* Man hat dabei das obige Verfahren insofern etwas zu modifizieren, als nach Erledigung von $\beta < \alpha$ die Punkte (7) auf $\mathfrak{K}_\alpha$ nicht gleichzeitig eingeführt werden dürfen, sondern nach einander. D. h.: Man wähle zuerst Q_α^1 auf $\mathfrak{K}_\alpha$, so daß Q_α^1 keinem (von $\mathfrak{K}_\alpha$ verschiedenen) Gebilde $\mathfrak{K}$ von Γ_α angehört, und bilde die Gesamtheit Γ_α^1 von Kurven $\mathfrak{K}$, die durch je k aus den Punkten (Q_β, Q_α^1) bestimmt sind; dann wähle man Q_α^2 auf $\mathfrak{K}_\alpha$ so, daß Q_α^2 keinem (von $\mathfrak{K}_\alpha$ verschiedenen) Gebilde $\mathfrak{K}$ von Γ_α^1 angehört, und bilde die Gesamtheit Γ_α^2 von Kurven $\mathfrak{K}$, die durch je k aus den Punkten $(Q_\beta, Q_\alpha^1, Q_\alpha^2)$ bestimmt sind; usw.; das letzte zu α gehörige Γ_α^ν werde sodann mit $\Gamma_{\alpha+1}$ bezeichnet.

In gleicher Weise kann man noch weiter verallgemeinern, einmal, indem man die Scharen von Geraden oder Kurven durch Gesamtheiten anderer Gebilde g ersetzt, von denen jedes einzelne durch k seiner Punkte bestimmt ist, und andererseits, indem man zu ganz beliebigen Räumen $\mathfrak{R}$ irgend welcher Elemente P übergeht. Man erhält so den *allgemeinen Satz*:

Es sei $\mathfrak{R}$ *ein ganz beliebiger Raum von unendlich vielen Elementen P; die Mächtigkeit von* $\mathfrak{R}$ *sei* $\mathfrak{r}$. *In* $\mathfrak{R}$ *sei eine unendliche Menge* Γ *von Gebilden g folgender Art vorgelegt: Die Mächtigkeit* $\mathfrak{g}$ *der Menge* Γ *sei* $\leq \mathfrak{r}$; *ferner sei jedes g, als Menge der Elemente P aufgefaßt, von einer Mächtigkeit* $\mathfrak{g}'$, *für welche* $\mathfrak{g} \leq \mathfrak{g}' \leq \mathfrak{r}$ *gelte*[1]*); jedes g sei durch je k seiner Elemente in der Gesamtheit* Γ *eindeutig bestimmt (wobei k eine endliche Anzahl ist). Ist nun n eine Anzahl* $\geq k$[2]*), so existieren in* $\mathfrak{R}$ *Mengen* $\mathfrak{Q}$

[1]) $\mathfrak{g}'$ bedeutet im Text für alle g dieselbe Mächtigkeit; es kann aber auch zugelassen werden, daß sich $\mathfrak{g}'$ innerhalb der vorgeschriebenen Grenzen mit wechselndem g ändern kann.

[2]) n kann statt einer endlichen Anzahl auch eine unendliche Mächtigkeit bedeuten, sofern nur $n < \mathfrak{g}'$ ist (bei wechselndem $\mathfrak{g}'$ ist hier das kleinste $\mathfrak{g}'$ zu nehmen).

(von Elementen P), die mit jedem Gebilde g von Γ genau n Elemente P gemeinsam haben.

In allen oben erwähnten Spezialfällen ist $\mathfrak{r} = \mathfrak{g} = \mathfrak{g}' = \mathfrak{c}$. Sind jedoch diese Mächtigkeiten verschieden, so hat man bei (1) $\alpha < \Omega_\mathfrak{g}$ und bei (2) $\alpha < \Omega_\mathfrak{r}$ zu wählen, wobei $\Omega_\mathfrak{g}$ bzw. $\Omega_\mathfrak{r}$ die den Mächtigkeiten $\mathfrak{g}$ bzw. $\mathfrak{r}$ zugehörenden Anfangszahlen sind; und an Stelle von (8) tritt, da $\aleph < \mathfrak{g} \leqq \mathfrak{g}'$ ist,

$$(8) \qquad (n\aleph)^k < \mathfrak{g}'.$$

Wir erwähnen noch eine nach etwas anderer Richtung gehende Verallgemeinerung: Man kann statt der Geraden g z. B. *Ebenen* $\mathfrak{E}$ nehmen; dann ist $\mathfrak{E}$ nicht durch irgend drei ihrer Punkte bestimmt, sondern nur durch je drei ihrer Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Man kann auch hiefür den gleichen Beweis benutzen, wenn man die vorhin angegebene Modifikation, die Punkte Q_α nicht gleichzeitig, sondern nacheinander einzuführen, anwendet; sobald man nämlich in $\mathfrak{E}_1$ die Punkte Q_1 so annimmt, daß sie zu je dreien nicht auf einer Geraden liegen, dann werden von selbst auch in den folgenden Ebenen keine drei Punkte Q auf einer Geraden liegen und man kommt auch hier für $n \geqq 3$ zur *Existenz von Punktmengen, die mit jeder Ebene genau n Punkte gemeinsam haben.* Auch dies könnte man noch verschiedentlich weiter verallgemeinern, insbesondere auf Systeme von Flächen. —

Wir haben bisher nur die Existenz der Mengen mit *einzigem* Ordnungsindex n (und ihre unmittelbaren Verallgemeinerungen) nachgewiesen. Nun noch ein Wort über die Mengen *von n-ter Ordnung* mit *vorgeschriebener* Verteilung der Ordnungsindizes. Irgend eine Gerade trifft ein solches Gebilde in *höchstens* n Punkten. Man gebe sich eine ganz beliebige, n enthaltende Teilmenge $\mathfrak{N}$ der ganzen Zahlen 0 bis n; dann existieren dazu stets Mengen $\mathfrak{Q}$, so *daß die Gesamtheit der Ordnungsindizes von $\mathfrak{Q}$ genau mit $\mathfrak{N}$ übereinstimmt*[1]). Man braucht

[1]) Auch hier kann n gleich der Mächtigkeit $\mathfrak{a}$ der abzählbaren Mengen sein. Und dabei sind noch die zwei Fälle möglich: $\mathfrak{N}$ enthält $n = \mathfrak{a}$; oder dies ist nicht der Fall, aber $\mathfrak{N}$ enthält unendlich viele ganze Zahlen n.

nämlich für die Zahlen $2 \leqq \nu < n$ nur dieselbe Betrachtung wie früher zu machen, wobei an Stelle der festen Schnittzahlen n jetzt die (in $\mathfrak{N}$) wechselnden Schnittzahlen ν genommen werden; und die Indizes 0 und 1 kann man ebenfalls beliebig beifügen, da es immer wieder Gerade g_α aus (1) gibt, die keinen der vorhergehenden Punkte Q_β $(\beta < \alpha)$ enthalten und die deshalb entweder (Index 0) ganz frei gehalten oder (Index 1) mit nur einem Punkte Q_α versehen werden können. Und ebenso läßt sich (nach Übergang von 2 zu k) dies entsprechend auf alle im obigen betrachteten Verallgemeinerungen übertragen, indem stets die feste Schnittpunktzahl n durch die Zahlen der Zahlenmenge $\mathfrak{N}$ ersetzt wird.

§ 2. Ein paar allgemeine Bemerkungen über die Gebilde mit einzigem Ordnungsindex n.

Nachdem wir die Existenzfragen ganz allgemein behandelt haben, wollen wir uns von jetzt ab hier ausschließlich auf den Fall der *ebenen* Gebilde beschränken, obwohl z. B. die Überlegungen dieses Paragraphen sich ohne weiteres auch auf den drei- oder mehrdimensionalen linearen Raum übertragen lassen.

Man kann den Gebilden mit einzigem Ordnungsindex n[1]) noch mancherlei besondere Bedingungen auferlegen. Wir heben nur hervor: *Es gibt (für jedes $n > 1$) sowohl Gebilde mit einzigem Ordnungsindex n, die in der ganzen Ebene überall dicht liegen, als auch solche, die nirgends dicht liegen, und auch solche, die in vorgeschriebenen Gebieten überall dicht, sonst nirgends dicht liegen.* Zunächst kann man das Gebilde so konstruieren, daß es in der ganzen Ebene $\mathfrak{E}$ *überall dicht* liegt: Es gibt in $\mathfrak{E}$ nur abzählbar viele Kreisgebiete mit rationalen Mittelpunkten und rationalen Radien und man kann also diese Gebiete in eine einfache Reihe R ordnen. Man kann auf g_α die Punkte (7) jedesmal in dem ersten Gebiet von R wählen, in dem noch

---

[1]) Hier immer im eigentlichen Sinn genommen, d. h. auf jeder Geraden sollen genau n Punkte liegen.

keine vorhergehende Gerade einen Punkt Q besitzt (so lange es überhaupt noch solche freien Gebiete in R gibt).

Andererseits kann man durch eine andere Spezialisierung des Verfahrens von § 1 erreichen, daß die Menge $\mathfrak{Q}$ *nirgends dicht* wird. Man gebe sich eine nirgends dichte perfekte Schar von parallelen Geraden der Richtung h und eine andere ebenfalls nirgends dichte perfekte Schar von parallelen Geraden einer anderen Richtung k. Es existiert eine Wohlordnung der ersten Schar:

$$(9) \qquad h_1, h_2, h_3, \ldots, h_\alpha, \ldots \qquad \alpha < \Omega_c$$

und eine Wohlordnung der zweiten Schar:

$$(10) \qquad k_1, k_2, k_3, \ldots, k_\alpha, \ldots \qquad \alpha < \Omega_c.$$

Wir betrachten wieder wie früher die Geraden g_α aus (1), ersetzen aber die Verwendung von (2) durch folgende speziellere Vorschrift: Für $\beta < \alpha$ seien die Punkte (6) bereits bestimmt und die Gesamtheit der Verbindungsgeraden aller Paare von Punkten Q_β sei wieder mit Γ_α bezeichnet. *Entweder* besitzt nun g_α nicht die Richtung h; dann nehmen wir (je nachdem ob g_α zu Γ_α gehört oder einen oder keinen Punkt Q_β enthält) die Schnittpunkte von g_α mit den ersten $(n-2)$ bzw. $(n-1)$ bzw. n Geraden aus (9), die noch keinen Punkt Q_β enthalten und die g_α nicht in einem Punkt treffen, der auf einer von g_α verschiedenen Geraden aus Γ_α liegt. *Oder* g_α besitzt die Richtung h; dann verfahre man genau ebenso, nur daß an Stelle von (9) jetzt (10) verwendet wird. In beiden Fällen bezeichne man die so auf g_α ausgezeichneten Punkte wie in (7).

Nimmt man im vorstehenden die nirgends dichten perfekten Geradenmengen (9) und (10) vom Maß Null, so ist man sicher, daß auch die daraus abgeleiteten Mengen $\mathfrak{Q}$ das *Maß Null* haben. Darüber hinaus aber erhält man in sehr einfacher Weise eine allgemeine Aussage über das Maß unserer Mengen mit einzigem Ordnungsindex n oder allgemeiner über die Gebilde von endlicher oder abzählbarer Ordnung; nämlich den

Satz: Eine Menge $\mathfrak{M}$ von endlicher oder abzählbarer Ordnung besitzt stets das innere Maß Null.

Beweis: Es sei $\mathfrak{M}_1$ irgend eine *abgeschlossene* Teilmenge von $\mathfrak{M}$. Nach Voraussetzung wird $\mathfrak{M}_1$ von jeder Geraden der Richtung x in höchstens abzählbar vielen Punkten, also in einer Menge vom linearen Maß 0 getroffen; deshalb muß $\mathfrak{M}_1$ auch vom ebenen Maß 0 sein[1]). Wenn nun aber $\mathfrak{M}$ von positivem inneren (ebenen) Maß wäre, dann müßte $\mathfrak{M}$ eine abgeschlossene Teilmenge $\mathfrak{M}_1$ von positivem Maß enthalten, was unmöglich ist.

Die spezielleren Mengen mit einzigem Ordnungsindex n können, wie wir vorhin gesehen haben, vom Maß 0 sein. Es kann aber auch der andere noch mögliche Fall vorkommen, daß sie nicht meßbar, aber vom inneren Maß Null sind; man kann nämlich, um dies zu erreichen, ähnlich verfahren, wie dies Herr W. Sierpiński in seiner schönen Note „Sur un problème concernant les ensembles mesurables superficiellement“[2]) tut[3]), mit der überhaupt die Betrachtungen unserer beiden ersten Paragraphen sachlich und methodisch mannigfache Berührungspunkte haben.

§ 3. Beweis der Unmöglichkeit, dass ebene Mengen mit einzigem Ordnungsindex 2 ein Kontinuum enthalten können.

Ausgehend von allereinfachsten Kurven waren wir zu unserer Fragestellung und zu den von uns betrachteten Gebilden gekommen. Es wird uns daher vor allem interessieren, in wie weit unsere Gebilde Ähnlichkeit mit Kurven haben, insbesondere ob und wann sie Kontinua enthalten können. Wir werden in dieser Hinsicht vor allem die ebenen Gebilde 2. Ordnung betrachten, in diesem Paragraphen zunächst die ebenen Mengen mit einzigem Ordnungsindex 2.

---

[1]) Dieser Schluß ist nur ein Spezialfall der Formel:
$$\iint \varphi(x,y)\,dx\,dy = \int\left(\int \varphi(x,y)\,dx\right)dy, \quad \text{wenn } \varphi(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{für } M_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
ist, wobei M_1 als im Borelschen Sinne meßbar vorausgesetzt wird.

[2]) W. Sierpiński, Fundamenta mathematicae I (1920), p. 112/15.

[3]) Nur müßte man hier die Reihe (1) mit zu Grunde legen.

Wir beweisen zunächst den folgenden

Hilfssatz: Es sei $\mathfrak{C}$ ein zwischen den Punkten A und B irreduzibles Kontinuum[1]*; ferner sei $\mathfrak{G}$ ein (offenes) Gebiet, dem A und B angehören, und es enthalte $\mathfrak{C}$ einen in bezug auf $\mathfrak{G}$ äußeren Punkt*[2] *C; dann muß $\mathfrak{C}$ den Rand $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$ in mindestens 2 verschiedenen Punkten treffen.*

Beweis: Das Kontinuum $\mathfrak{C}$ muß $\mathfrak{R}$ in *mindestens einem* Punkt P treffen; ferner muß $\mathfrak{C}$ ein zwischen A und P irreduzibles Teilkontinuum $\mathfrak{C}_1$ enthalten. Wir nehmen nun an, es wäre P der *einzige* Punkt von $\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{R}$. Dann behaupte ich zunächst, daß $\mathfrak{C}_1$ ganz in $\overline{\mathfrak{G}}$ liegt, wenn mit $\overline{\mathfrak{G}}$ das abgeschlossene Gebiet bezeichnet wird, das aus der Vereinigung $\mathfrak{G} + \mathfrak{R}$ entsteht. Bilden wir nämlich den Durchschnitt $(\mathfrak{C}_1 \cdot \overline{\mathfrak{G}}) = \mathfrak{C}_2$. Wenn gezeigt ist, daß $\mathfrak{C}_2$ ein Kontinuum ist, so muß $\mathfrak{C}_2$ (wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{C}_1$ zwischen A und P) mit $\mathfrak{C}_1$ identisch sein. Angenommen, $\mathfrak{C}_2$ wäre kein Kontinuum, dann könnte man $\mathfrak{C}_2$ in zwei abgeschlossene, elementenfremde, nicht leere Teilmengen $\mathfrak{C}_2^*$ und $\mathfrak{C}_2^{**}$ zerlegen. P sei in $\mathfrak{C}_2^{**}$ enthalten. Die Komplementärmenge von $\mathfrak{G}$ werde mit $\mathfrak{A}$ bezeichnet; der Durchschnitt $(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C}_1)$ ist eine abgeschlossene (mindestens P enthaltende) Menge. Der einzige Punkt, den $(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C}_1)$ mit $\mathfrak{R}$ und mit $\mathfrak{C}_2^{**}$ gemeinsam hat, ist P, während $(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C}_1)$ und $\mathfrak{C}_2^*$ elementenfremd sind. Man hat also eine Zerlegung von $\mathfrak{C}_1$ in die beiden abgeschlossenen, elementenfremden, nicht leeren Teilmengen $\mathfrak{C}_2^*$ und $[\mathfrak{C}_2^{**} \dotplus (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C}_1)]$; eine solche Zerlegung des Kontinuums $\mathfrak{C}_1$ ist aber unmöglich; also muß auch $\mathfrak{C}_2$ ein Kontinuum und daher mit $\mathfrak{C}_1$ identisch sein; d. h. $\mathfrak{C}_1$ liegt ganz in $\overline{\mathfrak{G}}$.

Dasselbe gilt für ein in $\mathfrak{C}$ enthaltenes, zwischen B und P irreduzibles Kontinuum $\mathfrak{C}_3$. Da die beiden Kontinua $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_3$ den Punkt P gemeinsam haben, so ist ihre Vereinigungs-

---

[1] D. h. ein Kontinuum, das A und B enthält, das aber kein A und B enthaltendes Teilkontinuum umfaßt. Dieser wichtige Begriff stammt bekanntlich von Herrn L. Zoretti [Ann. Ec. Norm. (3) 26 (1909), p. 487].

[2] D. h. C soll weder innerer Punkt von $\mathfrak{G}$ sein, noch dem Rande $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$ angehören.

menge $(\mathfrak{C}_1 \dotplus \mathfrak{C}_3)$ ein Kontinuum, das A und B enthält und ganz in $\mathfrak{C}$ enthalten ist. Wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{C}$ zwischen A und B muß also $\mathfrak{C}$ mit $(\mathfrak{C}_1 \dotplus \mathfrak{C}_3)$ identisch sein; dies ist aber unmöglich, da $(\mathfrak{C}_1 \dotplus \mathfrak{C}_3)$ in $\overline{\mathfrak{G}}$ liegt, während $\mathfrak{C}$ den außerhalb $\overline{\mathfrak{G}}$ gelegenen Punkt C enthält. Also ist die gemachte Annahme, daß P der einzige Punkt von $(\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{R})$ ist, ausgeschlossen; d. h. $\mathfrak{C}$ muß mit $\mathfrak{R}$ mindestens zwei Punkte gemeinsam haben. q. e. d.

Auf Grund des vorstehenden Hilfssatzes beweisen wir nun den folgenden Satz, der die zu Beginn dieses Paragraphen gestellte Frage beantwortet:

Satz: Eine ebene Menge $\mathfrak{M}$ mit einzigem Ordnungsindex 2 kann kein Kontinuum enthalten.

Beweis: Angenommen, es enthielte $\mathfrak{M}$ ein beschränktes[1]) Kontinuum $\mathfrak{K}$; dann ist in $\mathfrak{K}$ ein zwischen zwei seiner Punkte A und B irreduzibles Kontinuum $\mathfrak{C}$ enthalten. Wir bilden nun den kleinsten konvexen Bereich $\mathfrak{B}$, dem $\mathfrak{C}$ angehört. Auf der Begrenzung von $\mathfrak{B}$ liegt mindestens ein von A und B verschiedener Punkt C von $\mathfrak{C}$. Es sei g eine durch C gehende Stützgerade von $\mathfrak{B}$. Auf g liegt dann (da $\mathfrak{M}$ vom einzigen Ordnungsindex 2 ist) noch ein zweiter, von C verschiedener Punkt C' von $\mathfrak{M}$. Durch C' legen wir eine zu g hinreichend benachbarte Gerade g', welche A und B von C trennt. Bezeichnen wir diejenige von g' bestimmte Halbebene, die A und B enthält, mit $\mathfrak{G}$, so zeigt der vorstehende Hilfssatz, daß g' von $\mathfrak{C}$ in mindestens zwei Punkten getroffen wird. g' enthält daher mindestens drei Punkte von $\mathfrak{M}$, im Widerspruch zur vorausgesetzten 2. Ordnung von $\mathfrak{M}$; also ist die Annahme, $\mathfrak{M}$ enthalte ein Kontinuum, unmöglich. q. e. d.[2])

Der vorstehende Satz gilt sicherlich nicht mehr für Mengen mit einzigem Ordnungsindex n, wenn $n \geqq 4$ ist; d. h. *für* $n \geqq 4$

---

[1]) Wir können $\mathfrak{K}$ gleich als beschränkt voraussetzen; denn in der Tat enthält jedes beliebige Kontinuum beschränkte Teilkontinua.

[2]) Zwei weitere Beweise dieses Satzes werden sich am Schluß von § 4 ergeben.

existieren Mengen $\mathfrak{M}_n$ mit einzigem Ordnungsindex n, die Kontinua enthalten. (Der Fall $n = 3$ bleibt dabei noch offen.) Dies läßt sich sogar so einrichten, daß $\mathfrak{M}_n$ ein *beliebig vorgegebenes* Kontinuum $\mathfrak{K}$ von $(n-2)$-ter oder geringerer Ordnung enthält. Man braucht zu diesem Zweck nur das Verfahren des § 1 folgendermaßen zu modifizieren: $\mathfrak{K}$ sei von der Ordnung $\nu \leq n - 2$. Für $\beta < \alpha$ sei das Verfahren bereits durchgeführt und wie früher werde die Menge der Verbindungsgeraden aller Punkte Q_β mit Γ_α bezeichnet. Wenn die Gerade g_α unser $\mathfrak{K}$ in μ Punkten trifft (wobei $0 \leq \mu \leq \nu$ ist) und wenn ϱ Punkte Q_β auf g_α liegen (wobei $0 \leq \varrho \leq 2$ ist), dann werden die ersten $n - \mu - \varrho$ Punkte aus der Reihe (2) gewählt, die auf g_α, aber nicht auf $\mathfrak{K}$ oder auf einer von g_α verschiedenen Geraden von Γ_α liegen; und diese Punkte werden wieder entsprechend, wie in (7), mit

$$Q_\alpha^1, \ldots, Q_\alpha^{n-\mu-\varrho} \tag{7a}$$

bezeichnet[1]). Die Menge der Verbindungsgeraden aller Punkte (Q_β, Q_α) werde wieder $\Gamma_{\alpha+1}$ genannt. Die Vereinigungsmenge $\mathfrak{M}_n$ aller Punkte Q_α (für $\alpha < \Omega_c$) und des Kontinuums $\mathfrak{K}$ ist dann die gesuchte Menge. Dabei ist noch zu bemerken: Eine beliebige von g_α verschiedene, in $(\Gamma_{\alpha+1} - \Gamma_\alpha)$ enthaltene Gerade $\bar{g}$ trifft $\mathfrak{K}$ in σ Punkten, wobei $0 \leq \sigma \leq \nu$ ist, und trägt außerdem 2 Punkte aus (7a), so daß $\bar{g}$ insgesamt höchstens n Punkte von $\mathfrak{M}_n$ enthält, also das Verfahren nicht gestört werden kann.

§ 4. Die ebenen Gebilde 2. Ordnung, die Kontinua enthalten.

Wir haben im vorigen Paragraphen gesehen, daß die ebenen Mengen mit einzigen Ordnungsindex 2 kein Kontinuum enthalten können. Wir stellen nun noch die allgemeinere Frage: *Wie muß bei einem Gebilde $\mathfrak{M}$ 2. Ordnung die Verteilung der*

---

[1]) Natürlich wird in dem möglichen Fall, wo $n - \mu - \varrho = 0$ ist, unter (7a) eine leere Menge verstanden.

Ordnungsindizes sein, damit 𝔐 Kontinua enthalten kann? Und ferner: *Wie sind diese Kontinua beschaffen?*

Wir behandeln die zweite Frage zuerst und beweisen den folgenden

Satz: Jedes ebene beschränkte Kontinuum 𝔎 von 2. Ordnung ist eine konvexe Kurve.

Beweis: Unter den Komplementärgebieten, die 𝔎 in der Ebene bestimmt, befindet sich genau ein nicht beschränktes Gebiet 𝔋. Wir betrachten zunächst den Fall, wo auch *mindestens ein beschränktes Komplementärgebiet* 𝔊 von 𝔎 vorhanden ist. [Man sieht übrigens sofort, daß in diesem Fall auch nur ein *einziges* beschränktes Komplementärgebiet 𝔊 vorhanden sein kann.] Sind nun P_1 und P_2 irgend zwei (innere) Punkte von 𝔊, so muß ihre Verbindungsgerade den Rand 𝔑 von 𝔊 in genau 2 Punkten $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ treffen und die (offene) Strecke $(R_1 R_2)$ gehört ganz zu 𝔊, während ihre beiden Verlängerungen in 𝔋 liegen; also gehört erst recht die Strecke $(P_1 P_2)$ zu 𝔊 und deshalb ist 𝔊 ein *konvexes Gebiet.* Sein Rand 𝔑 ist daher eine geschlossene konvexe Kurve, die ganz aus Punkten von 𝔎 besteht. Außerdem muß aber 𝔎 mit 𝔑 zusammenfallen; denn enthielte 𝔎 noch einen weiteren, nicht zu 𝔑 gehörenden Punkt Q, dann müßte die Verbindungsgerade von Q mit irgend einem (inneren) Punkt P von 𝔊 den Rand 𝔑 in zwei verschiedenen Punkten treffen, im Widerspruch mit der vorausgesetzten 2. Ordnung von 𝔎. Also ist in diesem Fall 𝔎 eine *geschlossene konvexe Kurve.*

Wir betrachten nun den *anderen Fall*, daß 𝔎 *kein beschränktes Komplementärgebiet bestimmt.* Es seien A und B zwei beliebige Punkte von 𝔎; g sei ihre Verbindungsgerade, mit s werde die offene Strecke (AB) bezeichnet. 𝔎 enthält ein zwischen A und B irreduzibles Kontinuum 𝔈. Vereinigt man 𝔈 mit s, so teilt $(\mathfrak{C} + s)$ die Ebene in genau 2 Gebiete, die beide von dem ganzen Gebilde $(\mathfrak{C} + s)$ begrenzt werden[1].

[1] Nach A. Rosenthal, Sitzungsber. Bayer. Akad. d. Wiss. 1919, p. 102 (Satz 6).

Von diesen ist eines beschränkt, das andere nicht beschränkt; das erstere werde mit $\mathfrak{G}^*$, das letztere mit $\mathfrak{H}^*$ bezeichnet. Die Verlängerungen von s gehören zu $\mathfrak{H}^*$; längs s gehören die Punkte auf der einen Seite zu $\mathfrak{G}^*$, auf der anderen zu $\mathfrak{H}^*$; deshalb muß $\mathfrak{G}^*$ vollständig auf einer Seite von g liegen und dasselbe gilt also auch für $\mathfrak{C}$. Jede Gerade, die einen inneren Punkt von $\mathfrak{G}^*$ enthält, muß den Rand $\mathfrak{R}^*$ von $\mathfrak{G}^*$ in mindestens zwei Punkten treffen. Wenn eine solche Gerade s nicht schneidet, so muß sie *genau zwei* Punkte von $\mathfrak{C}$ enthalten. Wenn auf einer Geraden h ein [von A und B verschiedener] Punkt C von s liegt, so sind zwei Fälle denkbar: entweder es wird $\mathfrak{C}$ von h in *einem* oder in *zwei* Punkten getroffen. Betrachten wir den letzteren Fall näher: Die beiden Schnittpunkte von h mit $\mathfrak{C}$ seien P_1 und P_2 und es liege P_1 zwischen C und P_2. Die Strecke $(C P_1)$ muß zu $\mathfrak{G}^*$ gehören; dagegen sind bezüglich $(P_1 P_2)$ zwei Teilfälle denkbar: entweder gehört $(P_1 P_2)$ zu $\mathfrak{H}^*$ oder zu $\mathfrak{G}^*$. Wir wollen zeigen, daß dieser letztere Teilfall, wo $(C P_1)$ und $(P_1 P_2)$ zu $\mathfrak{G}^*$ gehören, ausgeschlossen ist[1]. Es seien Q_1 bzw. Q_2 je ein Punkt von $(C P_1)$ bzw. von $(P_1 P_2)$. Man kann innerhalb $\mathfrak{G}^*$ Q_1 und Q_2 durch einen einfachen[2] Streckenzug σ verbinden; σ kann h in endlich vielen Punkten schneiden, aber es gibt auf σ einen letzten Schnittpunkt $\bar{Q}_1$ mit $(C P_1)$ und einen ersten Schnittpunkt $\bar{Q}_2$ mit $(P_1 P_2)$; das $\bar{Q}_1$ und $\bar{Q}_2$ verbindende Stück von σ sei mit $\bar{\sigma}$ bezeichnet. $\bar{\sigma}$ liegt ganz auf der einen Seite von h. Nun bildet die Vereinigung der Strecke $[\bar{Q}_1 \bar{Q}_2]$ mit $\bar{\sigma}$ ein einfaches geschlossenes Polygon $\mathfrak{P}$. Im inneren Gebiet von $\mathfrak{P}$ kann nach unserem Hilfssatz des vorigen Paragraphen kein Punkt von $\mathfrak{C}$ liegen, weil der Rand $\mathfrak{P}$ nur einen einzigen Punkt von $\mathfrak{C}$, nämlich P_1, enthält. Es seien $\mathfrak{U}_1$ bzw. $\mathfrak{U}_2$ je eine kreisförmige Umgebung von $\bar{Q}_1$ bzw. von $\bar{Q}_2$, die ganz innerhalb $\mathfrak{G}^*$ enthalten sind. Man lege nun durch P_2 eine (zu h hinreichend

[1]) Der erste Teilfall [$(P_1 P_2)$ zu $\mathfrak{H}^*$ gehörend] ließe sich in analoger Weise ausschließen; doch scheidet dieser Fall nachher von selbst aus.

[2]) D. h. sich nicht selbst durchsetzenden.

benachbarte) Gerade h^*, die $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, s auf der zu $\bar{\sigma}$ entgegengesetzten Seite von h trifft. Seien Q_1^* bzw. Q_2^* je ein Punkt auf h^* innerhalb $\mathfrak{U}_1$ bzw. $\mathfrak{U}_2$. Dann erhält man durch Vereinigung der Strecken $[Q_1^* Q_2^*]$, $[Q_1^* \bar{Q}_1]$, $[Q_2^* \bar{Q}_2]$ mit $\bar{\sigma}$ ein einfaches geschlossenes Polygon $\mathfrak{P}^*$, in dessen Inneren P_1 liegt. Wieder nach unserem Hilfssatz von § 3 muß deshalb $\mathfrak{P}^*$ von $\mathfrak{C}$ in mindestens 2 Punkten getroffen werden; diese können nur auf $[Q_1^* Q_2^*]$ liegen; also müßte h^* 3 Punkte von $\mathfrak{C}$ enthalten, was unmöglich ist. Daher ist der Fall ausgeschlossen, daß $(C P_1)$ und $(P_1 P_2)$ zu $\mathfrak{G}^*$ gehören, und es gibt also auf jeder Geraden, welche einen inneren Punkt von $\mathfrak{G}^*$ enthält, genau *eine* ganz zu $\mathfrak{G}^*$ gehörende Strecke. Deshalb liegt die Verbindungsstrecke von irgend 2 Punkten von $\mathfrak{G}^*$ ganz innerhalb $\mathfrak{G}^*$, d. h. $\mathfrak{G}^*$ ist ein konvexes, beschränktes Gebiet und seine Begrenzung $\mathfrak{R}^* \equiv (\mathfrak{C} + s)$ ist demgemäß eine geschlossene konvexe Kurve. Also ist $\mathfrak{C}$ *ein konvexer Kurvenbogen.*

Dasselbe soll nun von dem ganzen Kontinuum $\mathfrak{K}$ nachgewiesen werden. Zu diesem Zweck legen wir zunächst an $\mathfrak{C}$ in A und B die Tangenten a und b. Von den 7 Gebieten, in welche die Ebene durch die 3 Geraden a, b, g zerlegt wird[1]), enthält eines, $\mathfrak{G}_1$, die Kurve $\mathfrak{C}$; zwei weitere sind mit $\mathfrak{G}_1$ in denselben von a und g bestimmten Scheitelwinkeln enthalten; zwei weitere liegen mit $\mathfrak{G}_1$ in denselben von b und g bestimmten Scheitelwinkeln; die beiden letzten, die mit $\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{G}_3$ bezeichnet werden sollen, sind mit $\mathfrak{G}_1$ in denselben von a und b bestimmten Scheitelwinkeln enthalten und unter diesen befindet sich eines, das an die Strecke s anschließt; dieses sei $\mathfrak{G}_2$. Die zugehörigen abgeschlossenen Gebiete sollen durch Überstreichen gekennzeichnet werden. Die nicht zu $\mathfrak{C}$ gehörenden Punkte von $\mathfrak{K}$ können sicherlich nur in $\overline{\mathfrak{G}}_2$ oder $\overline{\mathfrak{G}}_3$ liegen; denn ist P ein Punkt irgend eines der anderen (offenen) Gebiete, so muß entweder die Gerade $\overline{PA}$ oder die Gerade $\overline{PB}$ noch in einem weiteren Punkte $\mathfrak{C}$ treffen. Ferner kann auch

[1]) Wenn a und b zueinander parallel sind, werden nur 6 solche Gebiete bestimmt; es fällt dann $\mathfrak{G}_3$ weg.

sofort $\overline{\mathfrak{G}}_3$ ausgeschaltet werden. Denn: Der Schnittpunkt C von a und b[1]) liegt entweder auf der gleichen Seite von g wie $\mathfrak{C}$ oder auf der entgegengesetzten Seite; im *letzteren* Fall wird die Verbindungsgerade irgend eines [von C verschiedenen[2])] Punktes von $\overline{\mathfrak{G}}_3$ mit A (oder B) noch einmal die Kurve $\mathfrak{C}$ treffen. Im *ersteren* Fall liegt $\overline{\mathfrak{G}}_3$ auf derselben Seite von g wie $\mathfrak{C}$, aber in positiver Entfernung von $\mathfrak{C}$ sowie von $\mathfrak{G}_2$, so daß Punkte von $\overline{\mathfrak{G}}_3$ nicht zusammen mit $\mathfrak{C}$ und Punkten von $\overline{\mathfrak{G}}_2$ ein Kontinuum bilden können. Also alle nicht zu $\mathfrak{C}$ gehörenden Punkte von $\mathfrak{K}$ müssen in $\overline{\mathfrak{G}}_2$ liegen. Insbesondere liegen auf derjenigen Seite von g, auf der sich $\mathfrak{C}$ befindet, keine weiteren Punkte von $\mathfrak{K}$. Ist die Menge $(\mathfrak{K} - \mathfrak{C})$ nicht leer, so muß sie A oder B oder beide Punkte zu Häufungspunkten haben und die durch Hinzunahme dieser Häufungspunkte abgeschlossene Menge $(\overline{\mathfrak{K} - \mathfrak{C}})$ kann demgemäß nur aus einem oder zwei, jedenfalls nicht aus drei abgeschlossenen elementenfremden Teilen bestehen, ohne daß $\mathfrak{K}$ zerfiele. Also seien $\mathfrak{K}_1$ bzw. $\mathfrak{K}_2$ diese Kontinua, die zusammen $(\overline{\mathfrak{K} - \mathfrak{C}})$ bilden. $\mathfrak{K}_1$ sei vorhanden und enthalte den Punkt A. Sicherlich können nicht zugleich A und B zu $\mathfrak{K}_1$ [oder $\mathfrak{K}_2$] gehören; denn sonst wäre in $\mathfrak{K}_1$ ein zwischen A und B irreduzibles Kontinuum $\mathfrak{C}_1$ enthalten, also ein konvexer Bogen; deshalb würde $(\mathfrak{C}_1 \dotplus \mathfrak{C}_2)$ und also erst recht $\mathfrak{K}$ mindestens ein beschränktes Komplementärgebiet begrenzen, was der frühere, nicht der jetzt betrachtete Fall wäre. Man drehe b um B ins Gebiet $\mathfrak{G}_2$ hinein so lange, bis in bezug auf $\mathfrak{K}_1$ eine Stützlage b^* erreicht ist, d. h. b^* sei hierbei die erste Gerade, die einen (und wegen der 2. Ordnung von $\mathfrak{K}$ auch *nur* einen) Punkt A^* von $\mathfrak{K}_1$ enthält. [Natürlich kann b^* bereits mit b zusammenfallen; wobei aber sicherlich A^* von B verschieden ist.] Es gibt nun in dem Kontinuum

[1]) Sind a und b parallel, so ist ja $\mathfrak{G}_3$ überhaupt nicht vorhanden!

[2]) Auch Punkt C läßt sich hier ausschalten; denn gehört C zu $\mathfrak{K}$, dann kann kein Punkt P_2 von $\mathfrak{G}_2$ dazu gehören, da die Gerade P_2C $\mathfrak{C}$ trifft.

$(\mathfrak{K}_1 \dotplus \mathfrak{C})$ ein zwischen B und A^* irreduzibles Teilkontinuum $\mathfrak{C}_1^*$, also einen konvexen Bogen, der ganz auf der einen Seite von b^* liegt und der mit dem ebenfalls ganz auf dieser Seite von b^* gelegenen Kontinuum $(\mathfrak{K}_1 \dotplus \mathfrak{C})$ identisch sein muß. Ebenso zeigt man, daß (wenn $\mathfrak{K}_2$ vorhanden ist) auch $(\mathfrak{K}_2 \dotplus \mathfrak{C})$ ein konvexer Bogen mit den Endpunkten A und B^* ist. Also ist $\mathfrak{K}$ die Vereinigung der drei konvexen Bogen [die allerdings nicht alle drei zu existieren brauchen] $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{K}_2$, die außer A und B keine Punkte gemeinsam haben. Deshalb ist $\mathfrak{K}$ selbst ein zwischen A^* und B^* irreduzibles Kontinuum, also ein einziger *konvexer Bogen.* q. e. d.

Das gleiche läßt sich nunmehr auch leicht für ein *nicht beschränktes* Kontinuum $\mathfrak{K}$ beweisen. Zunächst ist jedes beschränkte Teilkontinuum $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{K}$ ein konvexer Kurvenbogen. Die Endpunkte von $\mathfrak{C}$ seien A und B. Nach der vorhergehenden Überlegung können weitere Punkte von $\mathfrak{K}$ nur in dem zu $\mathfrak{C}$ gehörenden Bereich $\overline{\mathfrak{G}}_2$ liegen und es muß wieder $(\overline{\mathfrak{K} - \mathfrak{C}})$ aus einem oder zwei Kontinuen $\mathfrak{K}_1$ bzw. $\mathfrak{K}_2$ bestehen. $\mathfrak{K}_1$ sei vorhanden und enthalte wieder A. Es gibt dann wieder unter den durch B gehenden, $\mathfrak{G}_2$ treffenden Geraden eine Grenzlage b^* (die eventuell mit b zusammenfällt), so daß in dem Winkel $\sphericalangle\,(g b^*)$ ganz $\mathfrak{K}_1$ enthalten ist. [b^* selbst braucht hier keinen Punkt von $\mathfrak{K}_1$ zu tragen.] Jede durch B gehende, innerhalb des $\sphericalangle\,(g b^*)$ liegende Gerade trifft $\mathfrak{K}_1$, da andernfalls eine Zerspaltung von $\mathfrak{K}_1$ folgen würde; und zwar muß $\mathfrak{K}_1$ in genau einem Punkt getroffen werden. Betrachten wir ferner diejenigen durch B gehenden Geraden, auf deren Nachbargeraden sich Punkte von $\mathfrak{K}_1$ befinden, die von B beliebig weit entfernt sind. Wenn derartige Gerade überhaupt vorhanden sind, dann gibt es im $\sphericalangle\,(g b^*)$, von g herkommend, eine erste solche Gerade k. Ist k von b^* verschieden, so trägt k einen im Endlichen gelegenen Punkt von $\mathfrak{K}_1$, der nicht Häufungspunkt des im $\sphericalangle\,(g k)$ oder des im $\sphericalangle\,(k b^*)$ enthaltenen Teiles von $\mathfrak{K}_1$ sein kann, so daß $\mathfrak{K}_1$ zerfallen müßte. Also fällt k mit b^* zusammen; d. h. in jedem im $\sphericalangle\,(g b^*)$ enthaltenen *kleineren* Winkel $\sphericalangle\,(g b^{**})$ bleibt $\mathfrak{K}_1$ beschränkt; also

der hierin enthaltene Teil von $\mathfrak{K}_1$ ist ein konvexer Bogen. Daher ist entweder $\mathfrak{K}_1$ ein beschränkter oder ein ins Unendliche laufender konvexer Bogen. Analog alles für $\mathfrak{K}_2$. Es ergibt sich so, daß $\mathfrak{K}$, *wenn es nicht beschränkt ist,* ein (nach einer oder zwei Seiten) *ins Unendliche laufender konvexer Kurvenbogen* sein muß. Also haben wir ganz allgemein den

Satz: Jedes beliebige ebene Kontinuum 2. Ordnung ist eine konvexe Kurve.

Nunmehr ist es leicht, auch die erste, zu Beginn dieses Paragraphen gestellte Frage zu beantworten, nämlich die Frage nach der Verteilung der Ordnungsindizes derjenigen Gebilde 2. Ordnung, die Kontinua enthalten.

Zunächst *muß bei einer Menge $\mathfrak{M}$ 2. Ordnung, die ein Kontinuum enthält, der Ordnungsindex 0 vorhanden sein.*

Denn: $\mathfrak{M}$ enthält nach dem vorigen Satz einen konvexen Kurvenbogen $\mathfrak{C}$ mit den Endpunkten A und B. Man lege an $\mathfrak{C}$ in A und B die Tangenten a und b sowie die Verbindungsgerade g von A und B. Wie oben gezeigt, können weitere Punkte von $\mathfrak{M}$ nur in $\overline{\mathfrak{G}}_2$ und, wenn a und b sich auf derselben Seite von g schneiden, auf der $\mathfrak{C}$ liegt, auch in $\overline{\mathfrak{G}}_3$ liegen[1]). Jede zu g parallele Gerade g', welche das Gebiet $\mathfrak{G}_1$ trifft (in dem $\mathfrak{C}$ liegt), ohne $\mathfrak{C}$ zu schneiden, kann demgemäß *keinen* Punkt von $\mathfrak{M}$ enthalten. Also muß der Ordnungsindex 0 vorkommen und zwar *auf unendlich vielen Geraden, die in der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ vorhanden sein müssen.*

Ebenso einfach ergibt sich, daß *bei einer Menge $\mathfrak{M}$ 2. Ordnung, die ein Kontinuum enthält, der Ordnungsindex 1 vorkommen muß.*

Denn: $\mathfrak{M}$ enthält wieder einen konvexen Kurvenbogen $\mathfrak{C}$ mit den Endpunkten A und B. Es sei C ein von A und B verschiedener Punkt von $\mathfrak{C}$. Man lege in C eine Stützgerade g

[1]) Der Schnittpunkt C von a und b kann in jedem Fall (wo er existiert) zu $\mathfrak{M}$ gehören; allerdings muß dann $\mathfrak{M}$ ausschließlich aus der Vereinigungsmenge von $\mathfrak{C}$ und C bestehen (da die Verbindungsgerade von C mit irgend einem Punkt P von $\overline{\mathfrak{G}}_2$ oder $\overline{\mathfrak{G}}_3$ $\mathfrak{C}$ noch einmal trifft).

an $\mathfrak{C}$; dann enthält g nur den Punkt C von $\mathfrak{C}$, muß also, wenn der Ordnungsindex 1 nicht vorkommt, noch einen zweiten Punkt C' von $\mathfrak{M}$ tragen. Man lege durch C' eine zu g hinreichend benachbarte Gerade g', welche $\mathfrak{C}$ in zwei Punkten schneidet. Dann enthielte g' drei Punkte von $\mathfrak{M}$, im Widerspruch mit der 2. Ordnung. — Auch hier muß *der Ordnungsindex 1 auf unendlich vielen Geraden von der Mächtigkeit* $\mathfrak{c}$ *auftreten*; da der vorstehende Schluß für die Stützgeraden sämtlicher von A und B verschiedener Punkte C gilt.

Die beiden vorstehenden Aussagen über die Ordnungsindizes 0 und 1 liefern zugleich *zwei neue Beweise des Satzes von § 3*, daß nämlich eine Menge mit einzigem Ordnungsindex 2 kein Kontinuum enthalten kann[1]).

Fassen wir alle diese Bemerkungen zusammen, so erhalten wir den

Satz: Eine Menge 2. Ordnung kann nur dann ein Kontinuum enthalten, wenn alle drei Ordnungsindizes 0, 1, 2 vorhanden sind und zwar jeder von ihnen in der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$.

Übrigens kann eine Menge $\mathfrak{M}$ 2. Ordnung mehrere getrennte Kontinua, d. h. konvexe Bögen, enthalten. Denn man kann mehrere konvexe Bögen so legen, daß sie paarweise zueinander in den erlaubten Bereichen $\overline{\mathfrak{G}}_2$ und $\overline{\mathfrak{G}}_3$ liegen (nach der obigen Bezeichnungsweise) und von keiner Geraden in mehr als 2 Punkten getroffen werden.

Ist in $\mathfrak{M}$ eine geschlossene konvexe Kurve enthalten, so muß $\mathfrak{M}$ mit diesem Oval identisch sein. — Bezeichnen wir ferner mit „*Halboval*" einen (nicht geschlossenen) konvexen Bogen mit parallelen Tangenten in den Endpunkten. Sind in $\mathfrak{M}$ zwei getrennt liegende Halbovale $\mathfrak{O}'$ und $\mathfrak{O}''$ vorhanden, so müssen die zu $\mathfrak{O}'$ und $\mathfrak{O}''$ gehörenden Gebiete $\overline{\mathfrak{G}}_2$ einander gegenseitig enthalten, was nur möglich ist, wenn $\mathfrak{O}'$ und $\mathfrak{O}''$

---

[1]) Der zweite dieser neuen Beweise benutzt übrigens denselben Grundgedanken wie der Beweis von § 3. — Zugleich ist damit gezeigt, daß eine Menge $\mathfrak{M}$, die auf *jeder* Geraden, *die* $\mathfrak{M}$ *trifft, genau zwei* Punkte besitzt, *kein Kontinuum* enthalten kann.

gemeinsame Endtangenten haben und sich gegenseitig die hohlen Seiten zukehren. Weitere Punkte können dann zu $\mathfrak{M}$ nicht gehören. — Schließlich kann unter den in $\mathfrak{M}$ enthaltenen Bogen (die nicht Teile größerer Bogen sind) nur *ein einziger* sein, der *größer* als ein Halboval ist. Denn bei zwei solchen müßte jeder von ihnen in dem dreieckförmigen Bereich $\overline{\mathfrak{S}}_2$ des anderen liegen, was unmöglich ist.

Die Verwertung gemischter invarianter Flächenelemente zur Berechnung der Differentialinvarianten einer ebenen Transformationsgruppe.

Von **Gerhard Kowalewski** in Dresden.

Vorgelegt von F. Lindemann in der Sitzung am 8. Juli 1922.

In zwei Abhandlungen, deren eine bereits im Dezember 1921 in den Leipziger Berichten erschienen ist, während sich die andere dort im Druck befindet, habe ich eine neue Methode zur Berechnung der Differentialinvarianten ebener Transformationsgruppen entwickelt. Der von mir erzielte Fortschritt besteht darin, daß nicht mehr, wie bei Lie, vollständige Systeme integriert werden müssen, sondern nur Integrationen vollständiger Differentiale, also Quadraturen, auszuführen sind[1]).

Wenn auch von meiner Methode, die im wesentlichen auf der bisher unbemerkt gebliebenen Tatsache beruht, daß sich Differentialinvarianten von höherer als erster Ordnung als lineare Funktionen der höchsten Ableitung schreiben lassen, in den Arbeiten Lies und seiner Schule nirgends eine Spur zu finden ist, so hatte sich doch dem großen Meister unbewußt auf einem Umwege schon die Einsicht erschlossen[2]), daß die Bestimmung der Differentialinvarianten ebener Transformations-

---

[1]) Eine Ausnahme bilden nur diejenigen Gruppen, die sich auf q oder q, yq oder q, yq, y^2q reduzieren lassen. Bei ihnen muß eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung integriert werden.

[2]) Vgl. seine berühmte Abhandlung „Klassifikation und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen etc." Norwegisches Archiv 1883 oder Math. Annalen, Bd. 32.

gruppen durch „ausführbare Operationen“, wie er zu sagen pflegte, geleistet werden kann, abgesehen von den drei in Fußnote 1) bezeichneten Ausnahmefällen. Lie hat nämlich für seine sämtlichen ebenen Gruppentypen die Differentialinvarianten wirklich berechnet und andererseits gezeigt, daß die Zurückführung einer durch ihre infinitesimalen Transformationen gegebenen Gruppe auf die zugehörige kanonische Form nur „ausführbare Operationen“ erfordert, wenn es sich nicht gerade um einen jener drei Ausnahmefälle handelt.

In der vorliegenden Arbeit will ich die ganze Frage von einer anderen Seite behandeln und die Verwertung sogenannter gemischter Flächenelemente für die Berechnung der Differentialinvarianten ebener Transformationsgruppen auseinandersetzen, wodurch eine neue Quadraturenmethode zur Bestimmung dieser wichtigen Größen gewonnen wird, bei der man schließlich im allgemeinen nur ein einziges vollständiges Differential zu integrieren hat. In dieser Richtung öffnet sich noch ein weites, wenig bearbeitetes Gebiet, für das Lie sich erst in seinen letzten Jahren interessierte, als er Integralinvarianten und ihre Nutzbarmachung für Integrationsprobleme zu studieren begann.

Es fällt von meinen Untersuchungen auch neues Licht auf die von G. Pick in seiner Wiener Akademie-Abhandlung von 1906 begründete natürliche Geometrie ebener Transformationsgruppen, eine bis jetzt noch viel zu wenig gewürdigte, höchst interessante Theorie, von der die Differentialgeometrie manche Förderung zu erwarten hat. Die Pickschen kovarianten Koordinaten bilden eine besondere Klasse gemischter Differentialinvarianten und können nach meiner Quadraturenmethode durch „ausführbare Operationen“ aus den infinitesimalen Grundtransformationen der Gruppe gewonnen werden.

§ 1. Gemischte Pfaffsche Invarianten, Bogenelemente, Flächenelemente und Differentialinvarianten von G_r.

Mit G_r werde eine r-gliedrige ebene Transformationsgruppe bezeichnet, die auf zwei Kurvenelemente

$$x, y, y_1, \ldots, y_{\alpha-2} \text{ und } \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{\beta-2}$$

mit der Koordinatensumme $\alpha + \beta = r$ transitiv einwirkt[1]), so daß diese Elemente, die wir kurz $e_{\alpha-2}$ und $\mathfrak{e}_{\beta-2}$ nennen wollen, gegenüber G_r keine Invariante besitzen. Dann gibt es zwei invariante Pfaffsche Ausdrücke

$$\Pi_1 = \varphi_1(e_{\alpha-2}, \mathfrak{e}_{\beta-2})\,dx + \varphi_2(e_{\alpha-2}, \mathfrak{e}_{\beta-2})\,dy,$$
$$\Pi_2 = \psi_1(e_{\alpha-2}, \mathfrak{e}_{\beta-2})\,dx + \psi_2(e_{\alpha-2}, \mathfrak{e}_{\beta-2})\,dy$$

mit nicht verschwindender Determinante. Dieser den Kennern der Lieschen Theorien geläufige Satz gehört zu den Grundwahrheiten, von denen man sich ohne größere Vorkenntnisse direkt überzeugen kann. Im vorliegenden Falle würde ich dazu folgende elementare Überlegung empfehlen.

Man gehe aus von der endlichen Darstellung der Gruppe G_r und stelle in der durch die Differentialrechnung bekannten Weise fest, wie G_r auf die beiden Elemente $e_{\alpha-2}$ und $\mathfrak{e}_{\beta-2}$ wirkt. Die Gleichungen der so erweiterten Gruppe mögen lauten

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} X &= F(x, y, a_1, \ldots, a_r),\\ Y &= G(x, y, a_1, \ldots, a_r),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ Y_{\alpha-2} &= G_{\alpha-2}(x, y, y_1, \ldots, y_{\alpha-2}, a_1, \ldots, a_r),\\ \mathfrak{X} &= F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, a_1, \ldots, a_r),\\ \mathfrak{Y} &= G(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, a_1, \ldots, a_r),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \mathfrak{Y}_{\beta-2} &= G_{\beta-2}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{\beta-2}, a_1, \ldots, a_r).\end{aligned}\right.$$

---

[1]) Wir könnten ebensogut drei oder mehr Kurvenelemente mit der Koordinatensumme r zum Ausgangspunkt nehmen, vorausgesetzt, daß sie keine Invariante besitzen. Die Ableitungen bezeichnen wir der Bequemlichkeit halber durch untere Indizes.

Jetzt wollen wir noch eine neue Erweiterung der Gruppe vornehmen, indem wir darauf achten, wie die Differentiale dx, dy bei ihr transformiert werden, d. h. wir fügen zu den obigen Gleichungen noch die folgenden:

$$(2)\qquad \begin{cases} dX = \dfrac{\partial F}{\partial x} dx + \dfrac{\partial F}{\partial y} dy, \\ dY = \dfrac{\partial G}{\partial x} dx + \dfrac{\partial G}{\partial y} dy. \end{cases}$$

Da nach Voraussetzung $\alpha + \beta = r$ ist und die Elemente $e_{\alpha-2}$ und $\mathfrak{e}_{\beta-2}$ keine Invariante besitzen sollen, so kann das System (1) nach den Parametern $a_1, \ldots, a_r$ aufgelöst werden, wodurch diese als Funktionen von $e_{\alpha-2}$, $\mathfrak{e}_{\beta-2}$, $E_{\alpha-2}$, $\mathfrak{E}_{\beta-2}$ erscheinen. Setzen wir die gewonnenen Ausdrücke in die Gleichungen (2) ein, so gehen diese über in

$$(2')\ \begin{cases} dX = \varphi_1(e_{\alpha-2}, E_{\alpha-2}, \mathfrak{e}_{\beta-2}, \mathfrak{E}_{\beta-2})\, dx + \varphi_2(e_{\alpha-2}, E_{\alpha-2}, \mathfrak{e}_{\beta-2}, \mathfrak{E}_{\beta-2})\, dy, \\ dY = \psi_1(e_{\alpha-2}, E_{\alpha-2}, \mathfrak{e}_{\beta-2}, \mathfrak{E}_{\beta-2})\, dx + \psi_2(e_{\alpha-2}, E_{\alpha-2}, \mathfrak{e}_{\beta-2}, \mathfrak{E}_{\beta-2})\, dy. \end{cases}$$

Wenn wir nun das System (1) symbolisch in der Form

$$(E_{\alpha-2}, \mathfrak{E}_{\beta-2}) = (e_{\alpha-2}, \mathfrak{e}_{\beta-2})\, S_a$$

schreiben und

$$(e_{\alpha-2}, \mathfrak{e}_{\beta-2})\, S_b = (e'_{\alpha-2}, \mathfrak{e}'_{\beta-2})$$

setzen, wobei S_b ebenso wie S_a eine Transformation der Gruppe G_r bedeutet, so wird wegen der Gruppeneigenschaft

$$(E_{\alpha-2}, \mathfrak{E}_{\beta-2}) = (e'_{\alpha-2}, \mathfrak{e}'_{\beta-2})\, S_b^{-1} S_a = (e'_{\alpha-2}, \mathfrak{e}'_{\beta-2})\, S_c$$

sein. Die Systeme (1), (2) und (2') bleiben also bestehen, wenn man $x, y, \ldots, y_{\alpha-2}$ und $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots, \mathfrak{y}_{\beta-2}$ mit Strichen versieht und die Parameter $a_1, \ldots, a_r$ durch $c_1, \ldots, c_r$ ersetzt. Die rechten Seiten der Gleichungen (2'), wo die Parameter ganz fehlen, verhalten sich also invariant, wenn man $E_{\alpha-2}$, $\mathfrak{E}_{\beta-2}$ ungeändert läßt und auf $x, y, \ldots$ und $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots$ die Transformation S_b anwendet. Denkt man sich $E_{\alpha-2}$, $\mathfrak{E}_{\beta-2}$ irgendwie fixiert, so entstehen zwei invariante Pfaffsche Ausdrücke Π_1 und Π_2 von der behaupteten Form. Die Determinante

$\varphi_1 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1$ ist als Funktionaldeterminante von X, Y nach x, y von Null verschieden.

Man kann Π_1 und Π_2 als Invarianten des Elements $\mathfrak{e}_{\beta-2}$ und zweier unendlich benachbarter Elemente $e_{\alpha-2}$ auffassen. Nimmt man diese in vereinigter Lage an, setzt man also $dy = y_1\, dx$, so verwandeln sich Π_1 und Π_2 in gemischte invariante Bogenelemente, weil die vereinigte Lage zweier Elemente eine invariante Beziehung ist. Wir wollen ausdrücklich $\alpha > 2$ annehmen. Dann haben diese Bogenelemente die Form

$$d\sigma = \omega\,(e_{\alpha-2}, \mathfrak{e}_{\beta-2})\, dx. \tag{3}$$

Es ist ausgeschlossen, daß in beiden Fällen ω identisch verschwindet, weil die Gleichungen

$$\varphi_1 + y_1 \varphi_2 = 0, \qquad \psi_1 + y_1 \psi_2 = 0$$

nicht zusammen bestehen können. Andererseits würde das Verhältnis der beiden ω eine Invariante von $e_{\alpha-2}$ und $\mathfrak{e}_{\beta-2}$ sein, wenn es nicht konstant wäre. Da nach Voraussetzung der erstere Fall ausgeschlossen ist, so folgt, daß sich die beiden Bogenelemente nur um einen konstanten Faktor unterscheiden, so daß nur von einem Bogenelement der obigen Form zu reden sein wird.

Ebenso einfach erkennt man die Existenz eines gemischten invarianten Flächenelements. Man muß zu diesem Zweck zwei verschiedene zu $e_{\alpha-2}$ benachbarte Elemente in Betracht ziehen, also mit zwei Reihen von Differentialen operieren, den Differentialen d und den Differentialen d'. Die Invarianz von Π_1, Π_2 und

$$\Pi_1' = \varphi_1\,(e_{\alpha-2}, \mathfrak{e}_{\beta-2})\, d'x + \varphi_2\,(e_{\alpha-2}, \mathfrak{e}_{\beta-2})\, d'y,$$
$$\Pi_2' = \psi_1\,(e_{\alpha-2}, \mathfrak{e}_{\beta-2})\, d'x + \psi_2\,(e_{\alpha-2}, \mathfrak{e}_{\beta-2})\, d'y$$

bringt es mit sich, daß auch

$$\begin{vmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 \\ \Pi_1' & \Pi_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \psi_1 & \psi_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dx & dy \\ d'x & d'y \end{vmatrix}$$

eine Invariante ist. Es gibt also einen invarianten Ausdruck von der Form

$$\Omega(e_{\alpha-2}, \mathfrak{e}_{\beta-2})(dx\,d'y - dy\,d'x), \tag{4}$$

und zwar bis auf einen konstanten Faktor nur einen. Er stellt das invariante gemischte Flächenelement dar, von dem wir in der Überschrift sprachen.

Sind von der Gruppe G_r nur die infinitesimalen Transformationen bekannt, so lassen sich, wie man weiß, Bogenelement und Flächenelement durch Quadraturen finden. Ist $Af = \xi p + \eta q$ eine der r infinitesimalen Grundtransformationen, $\mathfrak{A}\mathfrak{f}$ dasselbe Symbol in den deutschen Veränderlichen, bezeichnet man ferner die Erweiterung nach Lies Weise durch obere Indizes und setzt zur Abkürzung

$$Wf = A^{(\alpha-2)}f + \mathfrak{A}^{(\beta-2)}\mathfrak{f},$$

so genügt Ω den Differentialgleichungen

$$W\Omega + \Omega(\xi_x + \eta_y) = 0 \tag{5}$$

und ω den Differentialgleichungen

$$W\omega + \omega(\xi_x + y_1\,\xi_y) = 0. \tag{6}$$

Aus (5) läßt sich $d \log \Omega$, aus (6) $d \log \omega$ gewinnen, und $\log \Omega$, $\log \omega$ ergeben sich dann durch Quadraturen.

Wir kehren noch einmal zu dem System (1) zurück und wollen es, anstatt durch die Gleichungen (2), nunmehr durch die Gleichung

$$Y_{\alpha-1} = \left(\frac{\partial G_{\alpha-2}}{\partial x} + y_1 \frac{\partial G_{\alpha-2}}{\partial y} + \cdots + y_{\alpha-1} \frac{\partial G_{\alpha-2}}{\partial y_{\alpha-2}}\right) : \left(\frac{\partial F}{\partial x} + y_1 \frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

erweitern, die angibt, wie sich die $(\alpha - 1)$te Ableitung von Y nach X durch die Elemente $e_{\alpha-1}$ und $\mathfrak{e}_{\beta-2}$ ausdrückt. Setzen wir hier für $a_1, \ldots, a_r$ die aus (1) gewonnenen Werte ein, so nimmt die obige Gleichung folgende Gestalt an

$$Y_{\alpha-1} = \varphi(e_{\alpha-2}, E_{\alpha-2}, \mathfrak{e}_{\beta-2}, \mathfrak{E}_{\beta-2}) + \psi(e_{\alpha-2}, E_{\alpha-2}, \mathfrak{e}_{\beta-2}, \mathfrak{E}_{\beta-2}) \cdot y_{\alpha-1}.$$

Dabei halten wir an der Annahme $\alpha > 2$ fest. Es zeigt sich nun ähnlich wie bei der Herleitung der beiden Pfaffschen

Invarianten, daß $\varphi + \psi y_{\alpha-1}$ invariant bleibt, wenn man $E_{\alpha-2}$ und $\mathfrak{E}_{\beta-2}$ festhält und auf $e_{\alpha-1}$, $\mathfrak{e}_{\beta-2}$ irgend eine Transformation der Gruppe wirken läßt. Hiermit ist bewiesen, daß es eine in $y_{\alpha-1}$ lineare Invariante von $e_{\alpha-1}$ und $\mathfrak{e}_{\beta-2}$ gibt, mit andern Worten eine gemischte Differentialinvariante von der Form

$$J = \varphi(e_{\alpha-2}, \mathfrak{e}_{\beta-2}) + \psi(e_{\alpha-2}, \mathfrak{e}_{\beta-2})\, y_{\alpha-1}. \tag{7}$$

Der Faktor ψ kann nicht identisch verschwinden, weil in dem Ausdruck für $Y_{\alpha-1}$ sicher $y_{\alpha-1}$ vorkommt.

J ist im wesentlichen die einzige Invariante von $e_{\alpha-1}$ und $\mathfrak{e}_{\beta-2}$. Ebenso gibt es je eine Invariante von e_α und $\mathfrak{e}_{\beta-2}$, von $e_{\alpha+1}$ und $\mathfrak{e}_{\beta-2}$ usw., die immer die höchste lateinische Ableitung linear enthält. Man findet diese höheren Differentialinvarianten $J_1, J_2, \ldots$ aus der niedrigsten J mit Hilfe des Bogenelements $d\sigma$, und zwar ist

$$J_1 = \frac{dJ}{d\sigma}, \quad J_2 = \frac{dJ_1}{d\sigma}, \ldots$$

Über die Berechnung von J aus den infinitesimalen Transformationen von G_r läßt sich folgendes sagen. Unter der von uns gemachten Annahme $\alpha > 2$ ist

$$W y_{\alpha-1} = L(e_{\alpha-2}) + y_{\alpha-1} M(e_{\alpha-2}).$$

Setzt man diesen Ausdruck in $WJ = 0$, d. h. in

$$W\varphi + W\psi \cdot y_{\alpha-1} + \psi\, W y_{\alpha-1} = 0$$

ein, so spaltet sich die Gleichung in

$$W\psi + \psi M = 0 \tag{8}$$

und

$$W\varphi + \psi L = 0. \tag{9}$$

Aus (8) findet man $d \log \psi$ und dann durch Quadratur $\log \psi$, aus (9) $d\varphi$ und durch Quadratur φ. Damit ist die gemischte Differentialinvariante J gewonnen.

§ 2. Verwertung der gemischten Differentialinvarianten, Bogenelemente und Flächenelemente zur Bestimmung der gewöhnlichen.

Die Berechnung gemischter Differentialinvarianten, Bogen- und Flächenelemente darf für einfacher gelten als die der gewöhnlichen, weil man die Erweiterung der infinitesimalen Transformationen nicht so weit zu treiben braucht. Hat man nun in der oben geschilderten Weise gemischte Differentialinvarianten, Bogen- und Flächenelemente durch Quadraturen berechnet, so kann man aus ihnen durch Differentiation und Elimination auch die gewöhnlichen finden.

Die β ersten Gleichungen der Reihe

$$J = \chi(e_{\alpha-1}, \mathfrak{e}_{\beta-2}),$$
$$J_1 = \frac{dJ}{d\sigma} = \chi_1(e_\alpha, \mathfrak{e}_{\beta-2}),$$
$$J_2 = \frac{dJ_1}{d\sigma} = \chi_2(e_{\alpha+1}, \mathfrak{e}_{\beta-2}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

wird man benutzen, um die Koordinaten von $\mathfrak{e}_{\beta-2}$ durch J, $J_1, \ldots, J_{\beta-1}$ und durch die Koordinaten von e_{r-2} auszudrücken. Ließen sich diese Gleichungen nicht nach den Koordinaten von $\mathfrak{e}_{\beta-2}$ auflösen, so gäbe es in der Reihe J, $J_1, \ldots, J_{\beta-1}$ ein Glied, das man durch die vorhergehenden und durch e_{r-2} ausdrücken könnte. Hieraus würde folgen, daß das Element e_{r-2} bei G_r nicht frei beweglich ist, daß also eine gewöhnliche Differentialinvariante von $(r-2)$ter oder niedrigerer Ordnung existiert. Wird von diesem Ausnahmefall, dessen Bedeutung man in meinen andern Arbeiten erörtert findet, abgesehen, so sind die Koordinaten von $\mathfrak{e}_{\beta-2}$ durch J, $J_1, \ldots, J_{\beta-1}$ und e_{r-2} ausdrückbar. Die gefundenen Ausdrücke werden nun in die nächstfolgende gemischte Differentialinvariante

$$J_\beta = \frac{dJ_{\beta-1}}{d\sigma}$$

eingesetzt. Diese erscheint dann abhängig von den β ersten J und von e_{r-1}. Damit ist die niedrigste gewöhnliche Differentialinvariante von G_r gewonnen[1]). In derselben Weise läßt sich das gemischte Bogenelement $d\sigma$ in ein gewöhnliches Bogenelement von der Form $\bar{\omega}(e_{r-2})\,dx$ und das gemischte Flächenelement in ein gewöhnliches von der Form $\overline{\Omega}(e_{r-2})$ $(dx\,d'y - dy\,d'x)$ verwandeln.

Wie bereits oben erwähnt wurde, übertragen sich unsere Betrachtungen ohne weiteres auf gemischte Invarianten, an denen mehr als zwei Elemente beteiligt sind, wobei die Koordinatensumme dieser Elemente gleich r sein muß. Auch dürfen die Elemente gegenüber G_r keine Invarianten besitzen. Natürlich muß r oberhalb einer gewissen Grenze liegen, wenn man diese Methode zur Berechnung gewöhnlicher Differentialinvarianten durch die gemischten überhaupt anwenden will. Man kann es gewöhnlich einrichten, daß die beteiligten Elemente alle von nullter oder erster und wenigstens eins wirklich von erster Ordnung sind. Der Vorteil dieses Verfahrens ist dann, daß man die Gruppe nur auf die erste Ordnung zu erweitern braucht. Hat man das Flächenelement

$$\Omega(e_1, \mathfrak{e}_{\beta-2}, \ldots)\,(dx\,d'y - dy\,d'x)$$

und das Bogenelement

$$d\sigma = \omega(e_1, \mathfrak{e}_{\beta-2}, \ldots)\,dx$$

bestimmt, so läßt sich die Berechnung der Differentialinvarianten ohne jede weitere Integration auf folgende Weise erledigen. Es ist klar, daß auch

$$\mathfrak{d}\mathfrak{s} = \omega(\mathfrak{e}_1, e_{\beta-2}, \ldots)\,\mathfrak{d}\mathfrak{x}$$

ein invariantes Bogenelement sein wird. Dabei sind die durch Punkte angedeuteten Elemente dieselben geblieben. Nur die lateinischen und deutschen Buchstaben haben ihre Rollen ge-

[1]) Die Größen $J, J_1, \ldots, J_{\beta-1}$ spielen hier die Rolle von Konstanten. Die Methode gilt auch noch in dem oben erwähnten Ausnahmefall. Wir lassen ihn nur mit Rücksicht auf die bequemere Darstellung bei Seite.

wechselt. Gleichzeitig mit $\Omega(dx\,d'y - dy\,d'x)$ ist nun offenbar auch

$$\frac{\mathfrak{d}\,\Omega}{\mathfrak{d}\,\mathfrak{s}}(dx\,d'y - dy\,d'x)$$

eine Invariante, wobei die Operation $\mathfrak{d}$ nur auf $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, ... wirkt. Man muß sich vorstellen, daß das Element $\mathfrak{e}_{\beta-2}$ längs einer Kurve fortrückt. Dividiert man die beiden mit $dx\,d'y - dy\,d'x$ behafteten Invarianten durcheinander, so entsteht die gemischte Differentialinvariante[1])

$$\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{d}\log\Omega}{\mathfrak{d}\,\mathfrak{s}}.$$

Da bei uns $\beta - 2$ entweder gleich 0 oder gleich 1 ist, so wird $\mathfrak{J}$ von e_1, $\mathfrak{e}_{\beta-1}$, ... abhängen. Wäre $\mathfrak{J}$ frei von $\mathfrak{y}_{\beta-1}$, so müßte es, weil die Elemente e_1, $\mathfrak{e}_{\beta-2}$, ... keine Invariante haben sollen, eine Konstante sein. Man hätte dann, abgesehen von einem konstanten Faktor,

$$\mathfrak{d}\,\mathfrak{s} = \mathfrak{d}\log\Omega.$$

Wir wollen von diesem Ausnahmefall, dessen gruppentheoretische Bedeutung sich leicht ermitteln ließe, absehen. Dann können wir aus $\mathfrak{J}$ eine Reihe höherer Invarianten

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{\mathfrak{d}\,\mathfrak{J}}{\mathfrak{d}\,\mathfrak{s}},\ \mathfrak{J}_2 = \frac{\mathfrak{d}\,\mathfrak{J}_1}{\mathfrak{d}\,\mathfrak{s}},\ \ldots$$

herleiten und aus ihnen durch Elimination die gewöhnlichen Differentialinvarianten (deutsch geschrieben).

Es kommt also letzten Endes nur darauf an, $\Omega(e_1, \mathfrak{e}_{\beta-2}, \ldots)(dx\,d'y - dy\,d'x)$ und $\omega(e_1, \mathfrak{e}_{\beta-2}, \ldots)\,dx$ zu finden, und wir werden sehen, daß im allgemeinen sogar das Flächenelement allein genügt.

---

[1]) Ähnlich läßt sich auch aus $d\sigma$ eine gemischte Differentialinvariante gewinnen.

§ 3. Beziehungen zwischen gemischten Flächenelementen, Bogenelementen und Differentialinvarianten.

Aus dem Erweiterungsgesetz der infinitesimalen Transformationen läßt sich entnehmen, daß die in § 2 mit $M(e_{\alpha-2})$ bezeichnete Größe ($\alpha > 2$) den Wert

$$\xi_x + \eta_y - \alpha(\xi_x + y_1 \xi_y)$$

hat. Vergleicht man nun die Differentialgleichungen (8) mit (5) und (6), so ergibt sich, da es bei ψ auf einen konstanten Faktor nicht ankommt,

$$\psi = \Omega \omega^{-\alpha}. \tag{10}$$

Um die gemischte Differentialinvariante $J = \varphi + \psi y_{\alpha-1}$ zu finden, hat man also noch mit Hilfe von (9) die Funktion φ zu ermitteln, d. h. ein vollständiges Differential zu integrieren. Obwohl wir am Schlusse von § 2 eine andere Methode kennen gelernt haben, die nur die Berechnung eines gemischten Flächenelements und Bogenelements verlangt, ist doch manchmal auch das direkte Verfahren zur Bestimmung von J bequem. Handelt es sich z. B. um eine projektive Gruppe und hat man die Fundamentalelemente $e_{\alpha-2}$, $\mathfrak{e}_{\beta-2}, \ldots$ so gewählt, daß sie alle von nullter und erster Ordnung sind, $e_{\alpha-2}$ aber von erster Ordnung, so wird $L = 0$ sein, weil die Gruppe die Differentialgleichung $y_2 = 0$ invariant läßt. Die Differentialgleichungen, aus denen sich φ bestimmt, lassen dann erkennen, daß φ eine Konstante ist, die man ohne weiteres gleich Null setzen darf, so daß die Invariante J die Form

$$y_2 \Omega(e_1, \mathfrak{e}_{\beta-2}, \ldots) \omega^{-3}(e_1, \mathfrak{e}_{\beta-2}, \ldots)$$

annimmt.

Es besteht auch zwischen dem gemischten Bogenelement und dem gemischten Flächenelement ein inniger Zusammenhang. Das aus den Gleichungen (5) berechnete Differential von $\log \Omega$ läßt erkennen, welches die höchste in Ω auftretende Ableitung y_ϱ ist. Wir stellen uns jetzt auf den allgemeinen Standpunkt, denken uns also die Fundamentalelemente $e_{\alpha-2}$, $\mathfrak{e}_{\beta-2}, \ldots$ nicht ausschließlich als Punkte und Linienelemente.

Nehmen wir nun $\varrho > 0$ an, so ergibt sich[1]) durch Differentiation von (5) nach y_ϱ

$$W\,\Omega_{y_\varrho} + \{2(\xi_x + \eta_y) - (\varrho + 1)(\xi_x + y_1\,\xi_y)\}\,\Omega_{y_\varrho} = 0,$$

und der Vergleich mit den Systemen (5) und (6) lehrt, daß

$$\Omega_{y_\varrho} = -\,\Omega^2\,\omega^{-(\varrho+1)}$$

gesetzt werden kann. Es kommt hier auf einen konstanten Faktor nicht an. Aus der gewonnenen Relation geht hervor

$$\omega = \left(\frac{\partial(\Omega^{-1})}{\partial y_\varrho}\right)^{-\frac{1}{\varrho+1}}. \tag{11}$$

Hat man also durch Integration eines vollständigen Differentials das Flächenelement $\Omega(dx\,d'y - dy\,d'x)$ bestimmt und enthält dieses eine Ableitung von y, so kann man nach der Formel (11) das Bogenelement $\omega\,dx$ finden. Liegt der besondere Fall vor, daß das Fundamentalsystem aus einem Linienelement zusammen mit Linienelementen und Punkten besteht, so treten die Betrachtungen am Schlusse von § 2 in Kraft, und es ist außer der Integration des Differentials $d \log \Omega$ im allgemeinen überhaupt keine Integration mehr zu leisten. Halten wir an dem erwähnten Sonderfall fest, so läßt sich, wenn $\Omega(e_1, \mathfrak{e}_{\beta-2}, \ldots)$ frei von y_1 sein sollte, wohl aber $\mathfrak{y}_1$ enthält, immer noch das Bogenelement ohne Integration finden. Man erhält nämlich durch Differentiation des auf diesen Fall übertragenen Systems (5) nach $\mathfrak{y}_1$

$$W(\log\Omega)_{\mathfrak{y}_1} + \left\{\frac{\partial\xi(\mathfrak{x},\mathfrak{y})}{\partial\mathfrak{x}} + \frac{\partial\eta(\mathfrak{x},\mathfrak{y})}{\partial\mathfrak{y}} - 2\left(\frac{\partial\xi(\mathfrak{x},\mathfrak{y})}{\partial\mathfrak{x}} + \mathfrak{y}_1\,\frac{\partial\xi(\mathfrak{x},\mathfrak{y})}{\partial\mathfrak{y}}\right)\right\}(\log\Omega)_{\mathfrak{y}_1} = 0.$$

Vertauscht man nun in $\log\Omega$ die deutschen und lateinischen Buchstaben, so verwandelt sich $(\log\Omega)_{\mathfrak{y}_1}$ in eine Funktion, die den Differentialgleichungen

[1]) Man überzeugt sich leicht, daß auch der Fall $\varrho = 1$ mit eingeschlossen ist.

$$Wf + \{\xi_x + \eta_y - 2(\xi_x + y_1 \xi_y)\} = 0$$

genügt, welche andererseits $\Omega \omega^{-2}$ erfüllt, so daß sich wieder die Möglichkeit ergibt, ω durch Ω auszudrücken. Der einzige Ausnahmefall, der übrig bleibt, ist der, daß Ω ganz frei von Ableitungen erscheint.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß man auch aus dem gemischten Bogenelement $\omega\, dx$ das gemischte Flächenelement $\Omega(dx\, d'y - dy\, d'x)$ gewinnen kann, wenn in ω eine höhere Ableitung von y als die erste vorkommt. Liegt der mehrfach erwähnte Sonderfall vor, so genügt es auch, wenn $\omega(e_1, \mathfrak{e}_{\beta-2}, \ldots)$ eine Ableitung von $\mathfrak{y}$ enthält, also $\beta = 3$ ist.

Durch Nullsetzen der Determinante der Wf ergeben sich manchmal invariante Relationen, die noch Vereinfachungen unserer Betrachtungen ermöglichen.



Über zwei verschiedenartige Injektionen syenitischer Magmen.

Von **Erich Kaiser.**

Mit vier Textfiguren.

Vorgetragen in der Sitzung am 4. November 1922.

Eigentümlich erscheinende Wege führten mich, nachdem ich wenigstens kurz mit zwei der von dem Bahnbrecher moderner petrographisch-geologischer Forschung W. C. Brögger untersuchten Vorkommen syenitischer Gesteine bekannt geworden war, einmal zu kürzeren, aber doch eingehenden Untersuchungen in die Serra de Monchique Portugals und dann zu ausgiebigen Studien an den Syenitvorkommen der südlichen Namib Südwestafrikas. Die Serra de Monchique mit ihrem einheitlich aufzufassenden Injektionskörper und die verschiedenen Syenitvorkommen der Namib Südwestafrikas bieten in ihren Formen und den mit ihnen zusammenhängenden Differentiations- und Assimilationsvorgängen in manchen Beziehungen große Gegensätze, nach anderer Richtung so große Ähnlichkeiten, daß sich ein Vergleich beider miteinander lohnt, um daraus allgemeine Schlüsse abzuleiten.

I. Die Injektionsformen und ihre Beziehung zur Faltung.

Die Serra de Monchique[1]) habe ich früher als einen Lakkolithen aufgefaßt, habe die damals schon vorliegenden Deutungen von Harker über phakolithische Injektionsformen besprochen, glaubte aber noch nicht, einen besonderen Injek-

---

[1]) Erich Kaiser, Der Eläolithsyenit der Serra de Monchique im südlichen Portugal. Neues Jahrbuch f. Min. 1914, Beil. Bd. 39 (Festband Bauer), S. 225—267.

tionstypus abtrennen zu müssen. Die Folgezeit lehrte mich aber, daß wir an so zahlreichen Stellen Injektionen in Beziehung zu Faltungsvorgängen sehen, daß diese Formen doch unbedingt von dem von Gilbert und anderen gedeuteten Lakkolithen abgetrennt werden müssen, vor allem, da sie genetisch vollkommen verschiedenartig sind, so daß es recht bedauerlich ist, daß unsere Lehrbücher den Begriff der Phakolithe noch nicht erläutern. Schon bald nach der Abfassung meiner ersten Arbeit über die Serra de Monchique beabsichtigte ich, meine ältere Darstellung dahin zu verbessern, daß wir die Serra de Monchique nicht als Lakkolith, sondern als Phakolith im Sinne von Harker deuten müssen, daß Injektion und Form nicht allein als aktive Äußerung des Magmas anzusehen sind, sondern daß äußere nichtmagmatische Faktoren für die Formgebung und Raumfüllung bestimmend waren. Diese Berichtigung schob ich infolge der Kriegsverhältnisse auf. Jetzt führten mich die neueren Ausführungen von Hans Cloos dazu, gerade diesen Intrusionsvorgang wieder näher zu betrachten. Anschließend an Untersuchungen von Erich Bederke spricht Cloos[1]) von einer neuen Intrusionsform, die, ebenfalls im konkordanten Injektionsverband, mit sichelförmigem Grundriß eine Verbindung von Faltungsvorgängen und Injektion zeigt. Wenn auch diese sichelförmig gestalteten konkordanten Injektionskörper nicht direkt mit der Serra de Monchique verglichen werden können, so zeigen sich doch in beiden Formen so große Beziehungen zu den Faltungsvorgängen, daß beide, mit anderen als besonderer Injektionstypus aufgefaßt, keinesfalls mit Lakkolithen zusammen besprochen werden dürfen. Der Begriff der

[1]) Hans Cloos, Der Mechanismus tiefvulkanischer Vorgänge. Sammlung Vieweg, Heft 57, Braunschweig 1921. Vgl. auch die übrigen Arbeiten desselben Verfassers zu diesem Thema: Geologie der Schollen in schlesischen Tiefengesteinen. Neue Untersuchungen im Grenzgebiete der Gebirgsbildung. Abh. d. Preuß. Geolog. Landesanstalt, N. F., Heft 81, Berlin 1920. — Tektonik und Magma. Untersuchungen zur Geologie der Tiefen. Abh. d. Preuß. Geolog. Landesanstalt, N. F., Heft 89, Berlin 1922. Darin besonders: Erich Bederke, Die Intrusivmasse von Glatz Reichenstein, S. 39—70. — Der Gebirgsbau Schlesiens, Berlin (Bornträger) 1922.

Phakolithe von Harker bedarf einer Erweiterung. Wenn ich Harker richtig verstehe, so betrachtet er zunächst verhältnismäßig kleine Injektionsformen, wenn er auch schon auf die Rücken von Baltzer hinweist. Im ganzen müssen alle diese mit der Faltung zusammenhängenden konkordanten Injektionsformen[1]) von den vielen kleinen und großen granitischen, bank- und linsenförmigen Einschaltungen in die Injektionsgneise mit weitgehender Injektionsmetamorphose bis zu den erwähnten konkordanten Injektionsformen in wenig metamorphosierte, gefaltete Gesteine dem Begriff der Phakolithe untergeordnet werden, für die eine Beziehung von Faltung und Injektion vorliegt. Auflockerungszonen der Gebirgsfaltung begünstigen diese Injektion. Dabei kommen verschiedenartige Stellen der Faltungszonen in Betracht. Führte Harker den Antiklinen eingelagerte Phakolithe vor, so zeigt uns das Beispiel von Cloos und Bederke Einschaltung in den einzelnen Gebirgsbogen, wogegen wir bei den konkordanten Injektionen der Injektionsgneise wohl in vielen Fällen noch nicht sagen können, wie sich die einzelnen Intrusivformen zu der Faltung verhalten. In einzelnen Fällen ist direkt nachzuweisen, daß die Injektion dieser Phakolithe in die letzte, in anderen Fällen in eine besondere Phase der Faltung fällt. Die folgenden Darlegungen über die Serra de Monchique zeigen nach dieser Richtung ein besonderes Beispiel.

Einzelheiten meiner früheren Darstellung brauche ich nicht zu wiederholen. Ich verweise auf die meiner früheren Arbeit beigegebenen Figuren und Profile, aus denen sich nicht nur die Konkordanz des Hauptkörpers, sondern auch vieler Parallellager ergibt, auch eine Konkordanz von Schlierenzonen (Zonen von Lazerations-Sphaeroiden Salomons) und eine Parallelität einer ausgesprochenen Klüftung mit den äußeren Grenzen des Intrusionskörpers.

Die Syenitstöcke der südlichen Namib bilden demgegenüber deutlich diskordante Formen, die unabhängig

[1]) Vgl. L. Milch, Zentralbl. f. Min. 1903, 445.

sind von der Faltung. Wenn ich auch bereits an früheren Stellen einiges über die Syenite der südlichen Namib auf Grund meiner Beobachtungen mitgeteilt habe,[1]) so habe ich noch nicht die Frage des Injektionsverbandes mit den Nebengesteinen behandelt. Von den in der Namib Südwestafrikas bis jetzt bekannt gewordenen Syenitvorkommen, dem Granitberg, etwa 80 km südlich von Lüderitzbucht, dem Signalberg-Schlueberg-Massiv an der Pomonainsel, etwa 60 km südlich der Lüderitzbucht, und dem Drachenberg-Massiv, etwa 55 km südsüdöstlich von Lüderitzbucht und dem von Herrn Dr. Reuning aufgefundenen Vorkommen bei Kap Cross etwa 115 km nordnordwestlich von Swakopmund sind nur die drei ersten in bezug auf ihren Injektionsverband durch meine Untersuchung näher bekannt geworden. Abb. 1 zeigt uns den Granitberg selbst und einige kleinere, nördlich davon gelegene Syenitdurchbrüche im Verhältnis zu der Kleinfaltung in der Umgebung. An dieser Faltung sind beteiligt ein krystalliner Untergrund von Gneisen, mit dem Schichtverbande konkordant injizierten älteren Graniten und diskordanten Durchbrüchen von jüngeren Graniten, dann ihnen diskordant auflagernd, Schichten der Namaformation. In diesen wird eine untere Dolomitlage von höher lagernden Quarziten und Sandsteinen mit Tonschiefern und oberen Dolomiten (bändriger Dolomit und Hauptdolomit) unterschieden. Diese Schichten sind in ungefähr parallele Falten gelegt, die im allgemeinen S—N, in der Nähe des Granitberges mehr SSO—NNW streichen. Durch diese hindurch sind die syenitischen Gesteine durchgebrochen und zeigen nur auf gewisse Strecken hin in einzelnen Apophysen lagerartiges Eindringen in das Nebengestein. Es herrscht also im allgemeinen ein diskordanter Injektionsverband, der nur stellenweise in Akkordanz

---

[1]) Erich Kaiser, Studien während des Krieges in Südwestafrika. 1. Assimilationserscheinungen an den Elaeolithsyeniten des Granitbergs in der südlichen Namib. Z. d. D. Geol. Ges. **1920**, Bd. **72**, Monatsber. S. 52—64. Bericht über geologische Studien während des Krieges in Südwestafrika. Abh. d. Gießener Hochschulgesellschaft II. Gießen **1920**, S. 18 u. f.

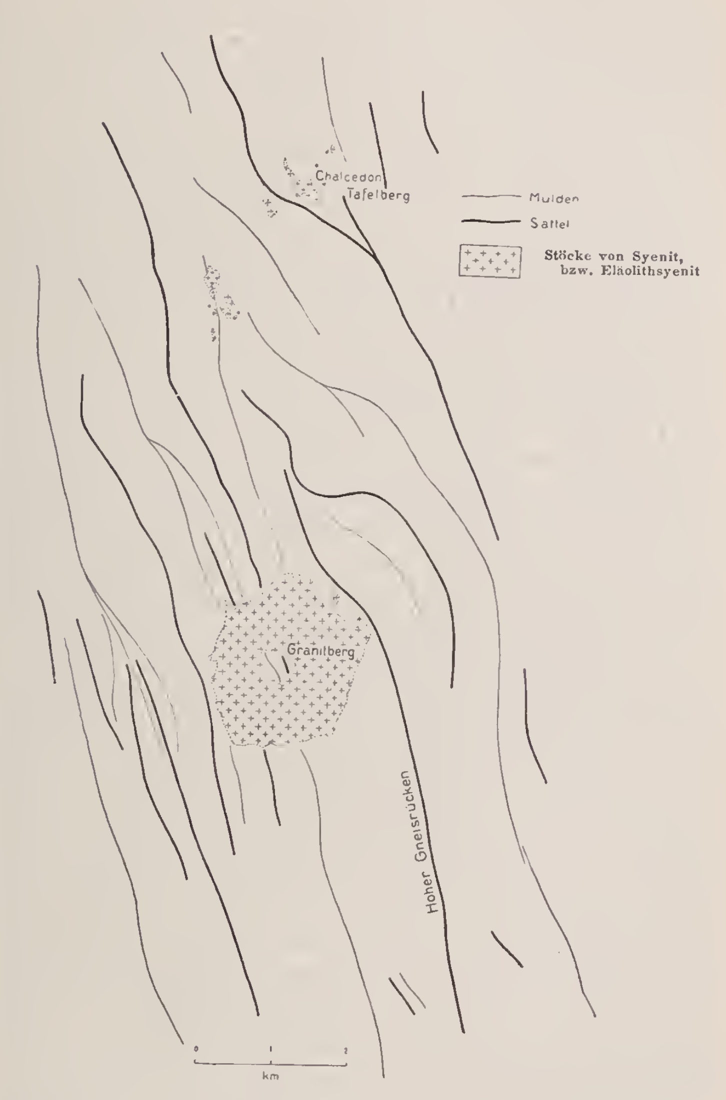


Abb. 1. Die Kleinfaltung in der Umgebung des Granitberg (Namib, SW.-Afrika).

im Sinne von Cloos übergeht. Die Faltenzüge, die vom Norden an den Granitberg heranstreichen, setzen im Süden in gleicher Richtung weiter fort. Selbst eine größere Scholle innerhalb des Injektionskörpers, die uns noch näher beschäftigen wird, zeigt die Fortsetzung der von N heranlaufenden Sättel und Mulden. Wenn auf der Kartenskizze im S zum Teil eine Fortsetzung der Faltenzüge fehlt, so liegt dies daran, daß gerade vor dieser, wenn auch nur wenig über die Umgebung sich erhebenden Kuppe große Massen von Flugsand angelagert sind und einen Einblick verhindern. Aber doch lassen sich die allgemeinen tektonischen Verhältnisse hier festhalten. Eine eigenartige Umbiegung der tektonischen Linien am Ostrande des Granitberges könnte leicht, aber fälschlich auf den Injektionsvorgang zurückgeführt werden. Denn diese Umbiegung der Linien im O erklärt sich einfacher, was aus der Abbildung 1 nicht, aber aus der, meinem demnächst erscheinenden Hauptwerke[1]) beizugebenden geologischen Spezialkarte (Aufnahme von Dr. W. Beetz und mir) zu ersehen ist. Diese Umbiegung der tektonischen Linien im O ist dadurch bedingt, daß hier von S an den Granitberg ein Sattel von alten Gneisen herantritt mit sehr starker doppelter Injizierung granitischer Gesteine. Dieser Komplex hat sich verhältnismäßig starr verhalten und eine Umbiegung der tektonischen Linien bei der Faltung vor der viel späteren Injektion der Syenite veranlaßt. Der verhältnismäßig starre Körper älterer krystalliner Gesteine hat hier eine Ablenkung der Faltenzüge bedingt, ebenso wie an anderen Stellen der südlichen Namib. Wäre der Injektionsvorgang gleichzeitig mit der Faltung, so würde man eine viel weitgehendere Akkordanz erwarten müssen und auch eine Umbiegung der tektonischen Linien an der W-Seite unseres Injektionskörpers.

Die beiden anderen größeren Syenitstöcke unseres Gebietes setzen nur in krystallinem Grundgebirge auf, durchbrechen nicht die Schichten der Namaformation. Daraus darf man

[1]) Erich Kaiser, Das südliche Diamantengebiet Südwestafrikas. Mit zahlreichen Karten und Tafeln. Erscheint 1923 bei der Verlagsbuchhandlung Dietrich Reimer (Ernst Vohsen), A.-G. in Berlin.

nicht schließen, daß sie älter sind als die dem Grundgebirge diskordant auflagernden Namaschichten. Denn die mit der Intrusion des Syenites des Signalberg-Schlueberg-Massivs und des Drachenberges gleichzeitigen, z. T. nur der Injektion nachfolgenden Gangintrusionen durchsetzen die gesamten Schichten der Namaformation.

In Abbildung 2 habe ich eine Übersichtsskizze der drei verschiedenen Syenitvorkommen, ihrer Ganggefolgschaft und ihres Verhältnisses zur Faltung gegeben. Von der Unzahl der bei der geologischen Kartierung festgestellten Gänge habe ich nur einen kleinen Teil, aber doch die wesentlichsten, eintragen können. Eine Akkordanz ist stellenweise zu beobachten. Die Mehrzahl der Gänge durchsetzt spießwinkelig nach allen Richtungen hin die Faltenzüge. Ein System kann vielleicht herausgelesen werden, das sich einmal ungefähr parallel zu dem Hauptküstenverlauf stellt und dann senkrecht dazu. Die Faltenzüge selbst stoßen im allgemeinen diskordant an der Küste ab. Eine Parallelität zwischen Faltenzügen und Streichen der Gänge ist nur dort häufiger zu beobachten, wo die Faltenzüge parallel zur heutigen Küste liegen. Aber widersinnig wäre es, aus zahlreichen Einzelbeobachtungen, von denen die Abbildung nur einen Teil wieder gibt, nun eine Beziehung von Küstenverlauf, Faltenbau und Gangstreichen herzuleiten. Richtiger ist es, die Vorgänge so zu trennen, daß man Faltung als unabhängig von der Küste ansieht, wie wir dies ja auch von anderen großen Teilen Südafrikas bereits wissen, daß der Küstenabbruch erst nach der Faltung erfolgte, mit dem vielleicht die syenitischen Injektionen und die Gangausfüllungen in Beziehung stehen. Jedenfalls aber muß man gerade aus dem Verhalten des Gangstreichens zu dem Faltenbau herleiten, daß auch die Ganginjektion unabhängig von der Faltung erfolgte, beide Vorgänge nicht synchron sind. Aus meinen zahlreichen Beobachtungen deute ich nur einen Teil an, der uns wiederum die Unabhängigkeit dieser Syenitinjektionen der südlichen Namib im ganzen von der Faltung anzeigt.

Wir haben also in diesen beiden miteinander verglichenen

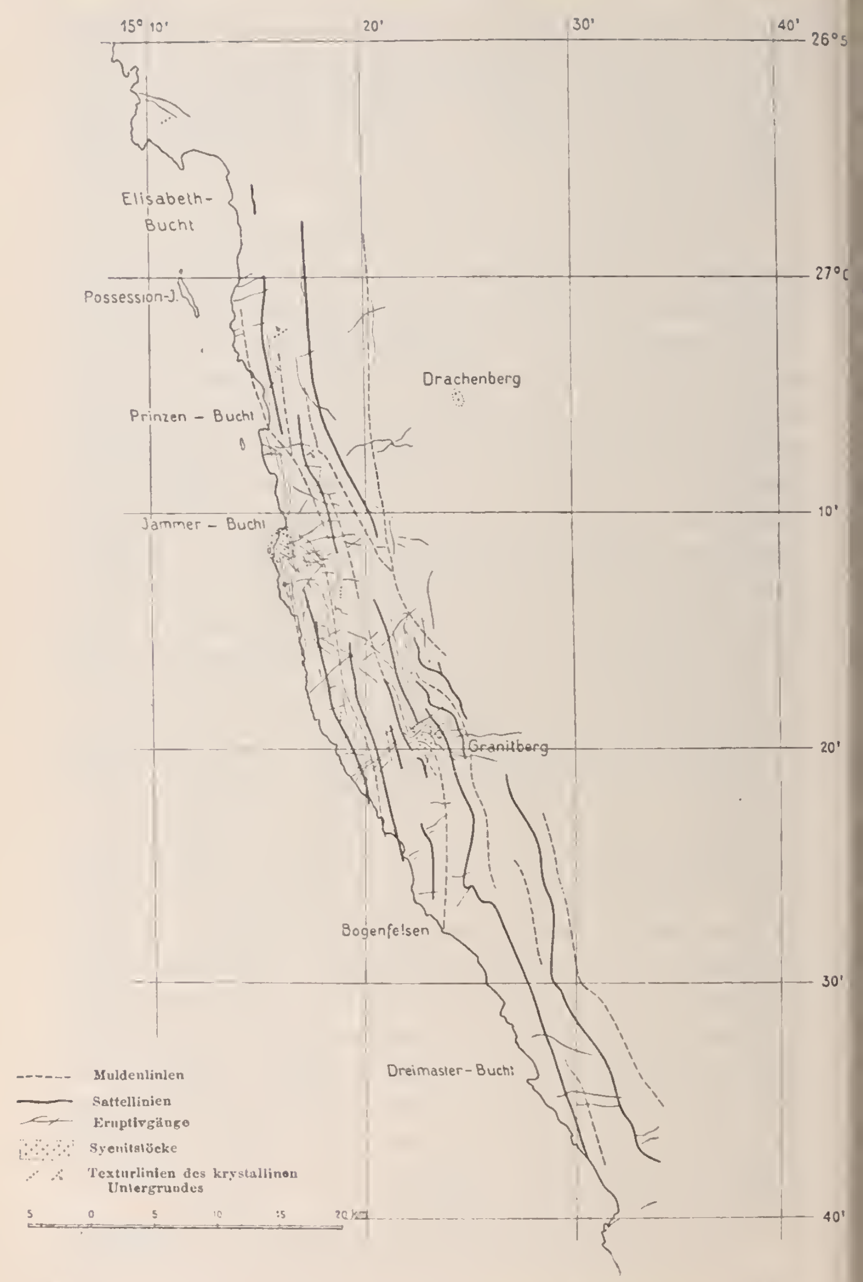


Abb. 2. Die Injektionen syenitischer Gesteine und ihrer Ganggefolgschaft im Verhältnis zur Faltung in der südlichen Namib Südwestafrikas (Küstenzone).

Formen von Tiefenintrusionen verschiedenartigen Injektionsverband vor uns. Nachdem wir nun die Untersuchungen von Cloos über die Anwendung granittektonischer Methode haben, fragt es sich, ob die vorliegenden Beobachtungen an den beiden Tiefenintrusionskörpern nach dieser Methode ausgewertet werden können. Bei den Untersuchungen in beiden Gebieten war mir die Arbeitsmethode von Hans Cloos unbekannt, so daß die Feldbeobachtungen, die z. T. bereits veröffentlicht, z. T. aus den Aufnahmebüchern hier zusammengestellt sind, nicht unter dem Gesichtspunkte der neueren granittektonischen Methode durchgeführt sind.

2. Gang- und Kluftrichtung.

In der Serra de Monchique treten mannigfache Ganggesteine auf, über deren Verhalten zu dem Hauptkörper ich früher nicht berichtete. Nach meinen Aufnahmebüchern beobachtete ich an zahlreichen Stellen Parallelität der Gangausfüllungen mit der Haupterstreckung des Phakolithen, Parallelität zum Salband, oder ein dazu ungefähr senkrechtes Streichen. Damit kommen (man vergleiche die Kartenskizze[1]) der Serra de Monchique) O-W, bzw. WSW-ONO gerichtete Gänge ebenso vor wie S-N oder SSO-NNW gerichtete. Dagegen sind nach anderer Richtung verlaufende Gänge seltene Ausnahmen. Von besonderer Bedeutung ist das Verhalten der basischen (camptonitisch-monchiquitischen) Gänge. „Die Ausfüllung beider Klüftungsrichtungen erfolgte wohl zu gleicher Zeit. Die basischen Gänge verwerfen sich gegenseitig nicht, sondern setzen glatt durch einander hindurch im Gegensatz zu anderen Stellen, wo sich basische und saure kreuzen, wobei die letzteren eine Verschiebung erfahren haben.“ Dieser bei den Feldbeobachtungen festgestellte Gegensatz ist von großer Wichtigkeit. Die ältesten Gänge sind hier saurer Beschaffenheit, während die später eindringenden basischen Nachschübe in zwei verschiedenen Klüftungsrichtungen zu gleicher Zeit eindringen konnten. Das senkrechte Durchschneiden mehrerer Gangrichtungen basi-

---

[1]) Anm. 1, Seite 255.

scher Ausfüllungen ist an vielen Stellen, namentlich in der Nähe des Kontaktes beobachtet. Dabei zeigte sich auch, daß in einer Richtung durchsetzende basische Gänge zahlreiche Apophysen in der dazu senkrechten Richtung aussenden. Sehr schön würde hier die Cloossche Darstellung durch eine Gangrose das Bild vervollständigen können, aber bei den Umbiegungen im Verlaufe des Salbandes würde eine derartige Darstellung ein verschleiertes Bild geben. Denn die Parallelität und das Senkrechtstellen zum Salband bedingt beim Wechsel in der Streichrichtung der Grenze auch ein Wechseln in dem Streichen der Gänge. Damit würde das Bild, auf die gesamte Serra de Monchique ausgedehnt, Abweichungen von dem im einzelnen beobachteten Bild ergeben. — Ebenso wie eine Parallelität von Gängen zum Salband beobachtet wurde, so wurde auch eine Parallelität der Klüftungserscheinungen mit dem Salbande festgestellt. Früher[1]) sprach ich von einer Bankung, davon, daß sich aus dem Verband des Eläolithsyenit Bänke herauslösen. Diese Ausdrucksweise darf man aber nicht mit der Bankung im Sinne von Cloos, sondern muß sie mit seinem Lager vergleichen, das in der Serra de Monchique recht steil gestellt ist. Ein Teil der Gangintrusionen folgt diesem Lager. Die zahlreichen dem Syenit eingeschalteten Schlieren und Resorptionserscheinungen, auf die ich später noch einmal zurückkomme, folgen ebenfalls dem Lager. Ein anderer Teil der Gänge entspricht aber den Querklüften von Cloos. Ich glaube auch, daß die anderen granittektonischen Elemente auch in der Serra de Monchique beobachtet worden wären, wenn ich damals schon hierauf geachtet hätte.

Zu beachten ist weiter die früher schon ausführlich besprochene Erscheinung, daß in der Umgebung des Eläolithsyenits der Serra de Monchique zahlreiche, typische Lagergänge konkordant in den Schichten auftreten, die alle zu den sauren Injektionen des Eläolithsyenitmagmas in die Umgebung gehören. Gegenüber der großen Zahl dieser sauren Apophysen

[1]) Anm. 1, Seite 255.

sind basische Gänge dort äußerst spärlich, fehlen sogar im größten Teil der Umgebung. Die Injektion des Eläolithsyenits selbst und die ältere saure Spaltung sind konkordant dem Schichtverband eingeschaltet, während die jüngere basische Spaltung, aber nur innerhalb des Eruptivkörpers, sich einmal derselben Richtung anpaßt, aber auch in eine zweite, dazu senkrechte Richtung eingepreßt wurde. Wir müssen dadurch zu der Auffassung kommen, daß bei dieser phakolithischen Injektion die gebildeten magmatischen Körper zuerst noch in die durch die Texturlinien des Nebengesteins vorbestimmte Richtung eingeordnet sind infolge einer Aufblätterung, die in dem Faltungsvorgang ihre Begründung hat, daß dann aber eine zweite Periode des Faltendruckes noch während der Spaltung des Eruptivkörpers einsetzt. Diese zweite Richtung äußert sich in einer Klüftung, die zu den Texturlinien des Nebengesteins senkrecht steht, während die Auflockerung sich ihrem Ende nähert. Infolge dessen werden nun zwei zueinander senkrechte, aber in Bezug auf den Injektionsvorgang gleichwertige Richtungen mit den basischen Spaltprodukten des Magmas ausgefüllt. Wir folgern daraus wiederum eine Verknüpfung von Faltungsvorgängen und dadurch bedingtem Wechsel der Druckrichtungen einerseits mit Injektionserscheinungen andererseits, ein Ineinandergreifen beider.

Im Gegensatz dazu aber stehen die Syenite der südlichen Namib. Ich greife aus dem Hauptwerke[1]) über meine südwestafrikanischen Arbeitsergebnisse nur das für diesen Vergleich wichtige heraus. Auf Klüftungserscheinungen in den Syeniten der Namib habe ich leider, wie ich zugeben muß, nicht genügend geachtet. Neben den primären Klüftungen aus der Injektionsperiode und deren direkten Folgeerscheinungen kommen aber in jenem Trockengebiete hinzu die zahlreichen Insolationsrisse, die die Felsen fast überall durchsetzen, an der Oberfläche fast alle Blöcke zerteilen. Aufschlüsse zum Einblick in große Tiefe gibt es nicht. Zweifellos wäre es sehr

[1]) Anm. 1, Seite 260.

wichtig, wenn einmal nachgeprüft würde, ob diese Insolationsrisse nicht in einer gewissen Beziehung stehen zu Klüftungen etc. Dabei müßten aber auch in jenem Trockengebiete die verschiedenartigen, sowohl die konkordanten (Granite im älteren Grundgebirge) wie diskordanten (jüngere Granite und die späten Syenite) Injektionskörper miteinander verglichen werden. Aber eine Hauptrichtung der Klüftung ist auch bei meinen Untersuchungen genauer festgelegt worden durch eingehende Verfolgung der auftretenden Gangausfüllungen. Diesen habe ich von Anfang an besonderes Augenmerk gewidmet, da gerade die z. T. überreichen Gangausstriche zu einer einheitlichen Darstellung führen mußten. Beschränkung war natürlich auch hier geboten. Denn wenn auch im allgemeinen in diesen Trockengebieten der Bau des Gebirges offen und klar zutage liegen soll, so gilt das nur bis zu einem gewissen Grade. Wenn im humiden Klima ein dichter Verwitterungsschutt und eine nur an wenigen Stellen unterbrochene Vegetationsdecke mit ihren humosen Verwitterungsprodukten den Einblick in den Untergrund bis aufs äußerste erschwert, so erleichtert zweifellos die Ausräumung chemischer und physikalischer Verwitterungsprodukte auf weite Strecken hin und der Mangel an Vegetation in jenem Wüstengebiete den Einblick sehr. Aber doch sind viele Stellen vorhanden, an denen Schuttmassen des Trockengebietes angehäuft sind und ebenso wie weit ausgedehnte Flugsandanwehungen den Untergrund verschleiern. Aber abgesehen von diesen gegenüber dem humiden Klimareiche verhältnismäßig beschränkten Stellen habe ich doch die meisten Gangausfüllungen innerhalb der Injektionskörper wie in dem Nebengestein genauer verfolgen können. Dabei zeigte sich nun, daß bei dem diskordanten Injektionsverband des Granitberg wohl eine Richtung bevorzugt ist, die sich von WSW nach ONO zieht, aber doch nicht senkrecht steht auf der Faltung der Schichten in der Umgebung. Aber abgesehen von dieser etwas bevorzugten Richtung zeigen sich alle möglichen Richtungen im Granitberg und dessen Umgebung. Sowohl radial aus dem Granitberg nach den verschiedensten Richtungen her-

austretende Gänge wie auf ziemliche Erstreckung hin parallel zu dem äußeren Salband, konzentrisch zu diesem, verlaufende Gänge sind vorhanden. Auch annähernd senkrecht zu dem Salbande streichende Gänge sind vorhanden. Aber die daraus sich ergebenden Winkel zwischen den ungefähr senkrecht zueinander verlaufenden Gängen sind nach den verschiedensten Richtungen hin geöffnet. Die Beziehung zwischen Salband und Gangausfüllung im Innern des Injektionskörpers ist derart, daß nach der annähernd rundlichen Begrenzung zahlreiche radiale Gänge durchlaufen und senkrecht dazu im Innern mit Gangmaterial ausgefüllte Spalten vorhanden sind, die aber bogig verlaufend immer wieder einen radial verlaufenden Gang senkrecht zu einem anderen Bogenstück des äußeren Salbandes entsenden. Die Einheitlichkeit des Injektionskörpers mit konkordantem Injektionsverband der Serra de Monchique fehlt. Dafür ist ein anderes, in den inneren, nicht den äußeren Verhältnissen begründetes System getreten.

3. Assimilationserscheinungen.

Sehen wir in den Gangausfüllungen beider Injektionskörper Gegensätze, so zeigen uns die Assimilationserscheinungen zunächst gewisse Ähnlichkeit. Unter dem Banne der früher herrschenden Ablehnung weitgehender Assimilation habe ich mich bei der Bearbeitung der Serra de Monchique noch nicht so scharf für Assimilation ausgesprochen, wie es sicher hätte erfolgen müssen, wenn ich die schönen überzeugenden Assimilationserscheinungen an den Syeniten der südlichen Namib gekannt hätte. Aber ich wies doch mehrfach auf den eigenartigen Verband von Schlieren hin, die parallel zu der äußeren Begrenzung des konkordanten Injektionskörpers der Serra de Monchique auftreten, sich von den eigenartigen Einstülpungen des Nebengesteins in den Syenitkörper hinein fortsetzen. Aus meinen Aufzeichnungen ergibt sich, daß ich immer wieder eine Parallelität der Einschlüsse mit den äußeren Begrenzungsflächen des Syenits feststellte, daß tafelige und nadelige Bestandteile, wie Feldspate, Glimmer, Hornblende der

äußeren Begrenzungsfläche parallel geordnet sind, woraus hervorgeht, daß wohl eine Streckung parallel dem Salbande vorliegt. Besonders hervortretend ist diese Parallelordnung in eläolithsyenitporphyrischen Schlieren innerhalb des Foyaits, in denen die tafeligen Feldspate parallel dem äußeren Salbande des gesamten Syenitkörpers auch dann geordnet sind, wenn die einzelne Schliere innerhalb des Syenits davon abweichend, unregelmäßig begrenzt ist, so daß dann z. T. einzelne Feldspate schiefwinklig, ja senkrecht auf der Begrenzungsfläche der Schliere stehen, sich dabei aber in die allgemeine Tektonik des ganzen Syenits einordnen. Es sind das Erscheinungen, die nicht mehr verwunderlich sind, wenn man von den Druckvorgängen ausgeht, die uns Hans Cloos an den Graniten gezeigt hat.

Besonders tritt eine schlierig-streifenförmige Anordnung der fremden Bestandteile mit deutlicher Paralleltextur in der Serra de Monchique am Kontakte hervor. In einzelnen, aufeinander folgenden Bändern sind reichlich oder spärlich dunkle Gemengteile angereichert, wodurch die Texturverhältnisse oft schon von weitem auffallen. Der Einfluß des Nebengesteins zeigt sich an den einen Stellen durch Vorwalten femischer, an den anderen Stellen salischer Bestandteile an der äußeren Zone des Injektionsmassivs. Struktur und Textur wechseln ständig. Auffallend sind auch in der Serra de Monchique am Salbande oft recht grobkörnige, ja pegmatitische Ausbildungen. Diese Assimilationsvorgänge an dem Salbande erklären verschiedenartige Gesteinstypen, die man nach alter Handstücksmethodik sehr wohl mit Namen belegen könnte und auch belegt hat, die aber, infolge ihres geologischen Verbandes, keine Selbstständigkeit besitzen. Die dem Syenit eingelagerten Einschlüsse erlitten die stärkste Metamorphosierung, stärker als die Kontaktwirkung auf das Nebengestein der Umgebung. Diese Umwandlung entspricht genetisch der Injektionsmetamorphose der krystallinen Schiefer. Die dunklen, basischen Schlieren zeigen „eine außerordentlich weitgehende Schwankung in bezug auf Mineralgehalt und Struktur", treten „in großen, aber nur z. T. unregelmäßig verlaufenden, und in der Zusammensetzung

schwankenden Schlieren innerhalb des normalen Foyaits“ auf. Ich zeigte bereits früher, daß „diese Schlieren basischer Gesteine sich in die allgemeinen Struktureigentümlichkeiten (wohl besser: tektonischen Verhältnisse) der Serra de Monchique einordnen.“ [1]) Ich stehe nach nochmaliger Durchsicht der gesammelten Handstücke nicht an, den größten Teil dieser Schlieren und der früher mit besonderem Namen belegten basischen Gesteine nicht Differentiations-, sondern Assimilationserscheinungen zuzuschreiben. Die Assimilation setzte in der Serra de Monchique überall an den Grenzflächen ein, besonders an den vielfachen Vorsprüngen des Nebengesteins innerhalb des Syenitkörpers. In der Fortsetzung der Vorsprünge des Nebengesteins in den Eruptivkörper hinein ist die Assimilation streichender Fortsetzungen von Nebengestein unter Bildung von sauren und basischen Mischgesteinen besonders stark gewesen. Aber diese Assimilationsreste innerhalb des Injektionskörpers sind eben deutlich gerichtet, alle in die allgemeinen tektonischen Verhältnisse eingefügt, im Gegensatze zu den Assimilationserscheinungen am Granitberg der südlichen Namib.

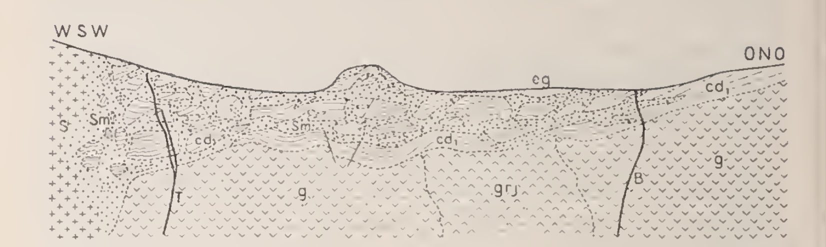
Assimilation tritt am Granitberg in der Namib Südwestafrikas sehr ausgeprägt auf. Sie ist mit einer starken Durchtrümerung des Nebengesteins verbunden, welche stellenweise den Schichtfugen folgt, stellenweise aber auch in vielfachen Adern diskordant durch das Nebengestein hindurchsetzt. Die aus der Tiefeninjektion der krystallinen Schiefer bekannte Injektion „Schicht für Schicht“ tritt in diesem Niveau unserer syenitischen Injektion seltener auf, was mit der höheren Teufe, dem geringeren Belastungsdrucke zusammenhängt, unter dem die Injektion an diesen Eläolithsyeniten erfolgte. Damit kommen aber grobbreccienartige Texturen zu stande, so daß man in diesen Aufschmelzungszonen zunächst an eine Eruptivbreccie denkt. Daß aber kein rein tektonischer Vorgang diese Zertrümmerung bedingte, sieht man daran, daß sich das Magma in seiner durch die Assimilation veränderten Beschaffenheit in

[1]) Anm. 1, Seite 255.

alle Fugen hineinarbeitet, daß nur magmatisches Bindemittel diese Bruchstücke verkittet. Diese Assimilationszone ist wechselnd breit, abhängig von dem Nebengestein, dessen Klüftung und dessen Neigung zur Injektion. In einiger Entfernung vom Kontakte, nach dem Innern des Eruptivkörpers hin, nimmt die Menge der im Magma schwimmenden Bruchstücke ab. Aber Mineralbestand, Textur und oft auch Struktur sind noch verändert gegenüber der Hauptausbildung innerhalb des Stockes. So hat man, von dem normalen Gestein in der Mitte ausgehend, eine wechselnd breite, durch die Assimilation veränderte Zone bis zum Salbande. Aber diese Übergangszone und vor allen Dingen das Salband genauer kartographisch festzulegen, ist unmöglich. Sowohl innere wie äußere Kontaktzone sind nicht scharf begrenzt infolge des allmählichen Zunehmens von Nebengesteinsmaterial und wegen der weitgehenden Durchtrümerung des Nebengesteins mit zahlreichen Apophysen. Auch hier sind die zahlreichen Bruchstücke hoch metamorphosiert. Eine besondere Anordnung dieser umgewandelten Einschlüsse ist nicht festzustellen, im Gegensatze zu der Serra de Monchique. Sie liegen regellos durcheinander. Eine Streckung derselben ist nicht beobachtet. Zwischen ihnen winden sich die magmatischen Adern hindurch, in denen man zuweilen eine parallele Anordnung der tafeligen und nadeligen Bestandteile parallel den Grenzen sieht. Aber in bezug auf die Hauptkontaktzone verlaufen diese Bänder ganz unregelmäßig.

Die krystallinen Schiefer am Kontakte sind von wenigen Apophysen durchsetzt, nur von zahlreichen Gängen aus der Gefolgschaft der Injektion durchzogen, die in dem starren älteren Komplexe der krystallinen Schiefer in derselben Menge wie im übrigen Nebengesteine auftreten. Intensiver aber ist die Injektion des Magmas in die unteren Dolomite der Namaschichten, unter geringfügiger Metamorphose, aber unter stärkerer Stauchung und Fältelung der Carbonatgesteine und der ihnen eingelagerten Schiefer. Die Injektion folgt dabei z. T. den Schichtfugen, setzt zum anderen Teile quer durch die einzelnen Bänke hindurch, wie dies die

Abbildungen 3 und 4, etwas schematisiert, andeuten. Die beiden Profile sind in etwa 200 m voneinander durch den Ostrand des Granitberg gelegt, können trotz der Abweichungen beider Profile aber nicht entfernt die wirklichen, äußerst verwickelten Injektionserscheinungen in die unteren Dolomite wiedergeben. Ein die Dolomite nach allen Richtungen durchsetzendes Netzwerk liegt vor. Die untere Grenze der unteren Dolomite fällt dabei flach gegen den Eläolithsyenit hin ein. Die krystallinen Schiefer sind glatt durchbrochen; aber in die unteren Dolomite setzen viele Injektionsbänder nebeneinander hinein, so daß im Niveau dieser unteren Dolomite eine wesentliche Verbreiterung des Injektionskörpers erfolgt. Die durch die älteren und jüngeren Granitinjektionen verfestigten krystallinen Schiefer sind verhältnismäßig starr auch gegenüber der jüngeren Syenitinjektion, so daß ein Eindringen des Magmas in sie nicht erfolgt, während die auflagernden Sedimente für die Injektion geeignetere Texturlinien aufweisen. Diese Injektion wird dadurch begünstigt, daß eine teilweise Einschmelzung des Nebengesteins, unter Freiwerden von Gasen, erfolgt. Die Carbonatgesteine werden z. T. aufgeschmolzen unter Umgestaltung des Magmas, das in allen diesen Adern, ohne irgend ein feinkörniges Salband, grob pegmatitisch erstarrt, unter Ausbildung von 3, 4, stellenweise sogar 10 cm großen Eläolithen und noch größeren Feldspaten. Daß auch die femischen Bestandteile in ihrer chemischen Zusammensetzung gegenüber dem Normalgesteine verändert und daß seltenere Mineralien vorhanden sind, mag nur erwähnt werden. Diese Assimilationsvorgänge haben zum Freiwerden von Gasen geführt, die in das Magma übertraten und pegmatitische Ausbildung begünstigten. Man kann diese Gase als sekundäre leichtflüchtige Bestandteile des injizierten Magmas bezeichnen; sie entsprechen den resurgenten Gasen von Daly. Die bei dieser Art von Injektion und damit zusammenhängender Assimilation erhöhte Dampfspannung bewirkt eine weitere Aufblätterung und Zertrümmerung des Nebengesteins, bewirkt also nicht nur auf der einen Seite eine strukturelle, wie chemische und mineralogische Ver-



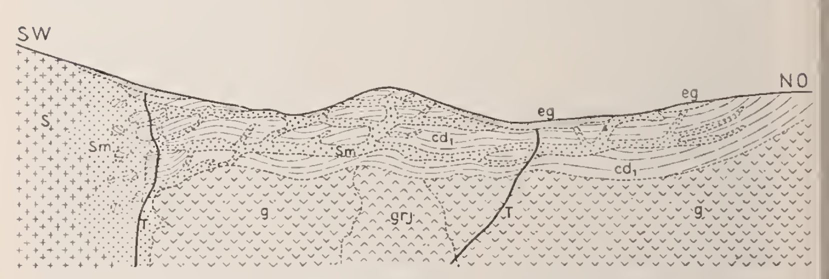
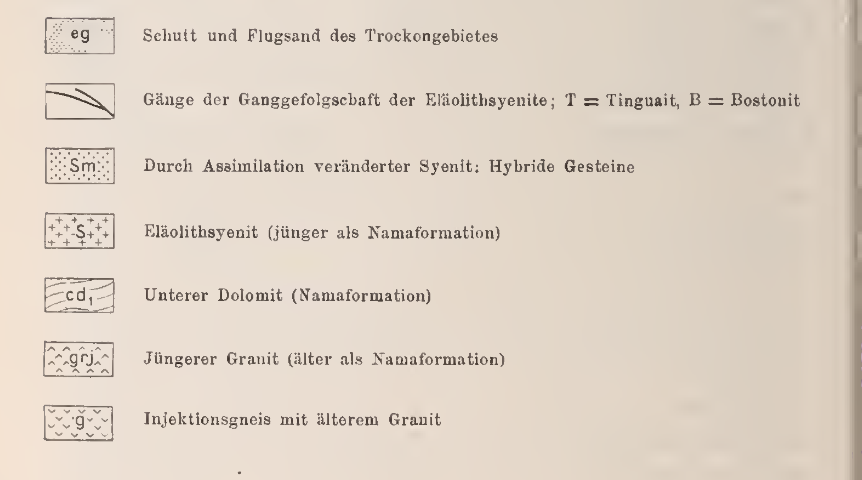


Abb. 3 u. 4. Injektionsverband des Eläolithsyeints am Granitberg (Namib, SW.-Afrika) mit den unteren Dolomiten der Namaformation.



änderung im Magma, sondern auch eine weitergehende Injektion in das Nebengestein hinein. Die Aufschmelzung des Nebengesteins und die damit zusammenhängende Assimilation erlangt also, zunächst lokal, eine wesentliche Bedeutung für den Injektionsvorgang selbst. Aufschmelzung von Carbonatgesteinen ist auch schon von anderen Stellen nachgewiesen worden. Ich verweise auf die älteren Darstellungen, die mir bei meinen Untersuchungen nicht bekannt waren, z. B. von Högbom[1]) an den Eläolithsyeniten von Alnö, von Stutzer an Eläolithsyeniten von Botogolsky-Golez in Ostsibirien,[2]) von Ussing von Julianehaab in Grönland,[3]) dann auf die neueren, für die ganze Frage wichtigen Mitteilungen von Brögger aus dem Fengebiete Norwegens[4]) mit eingehender Besprechung der Angaben anderer Verfasser, die von Brauns[5]) aus dem Laacher Seegebiet, die von Shand aus dem Sekukuniland und von Leeuwfontein in Transvaal,[6]) die Zusammenfassungen von Niggli[7]), die neuesten, z. T. theoretischen, aber zwingenden Schlüsse von Bowen[8]) und ebendessen ältere Schriften, wie

[1]) A. G. Högbom, Über das Nephelinsyenitgebiet auf der Insel Alnö. Geol. Föreningen Förhandlingar 1895, Bd. 17, S. 100, 214; 1909, Bd. 31.

[2]) O. Stutzer, Über primären Calcit im Eläolithsyenit des Botogolsky-Golez in Ostsibirien (Graphitgrube Alibert). Zentralbl. f. Min. 1910, S. 433.

[3]) V. Ussing, Geology of the country around Julianehaab, Greenland. Meddelelser om Grönland. Kopenhagen 1911, Bd. 38.

[4]) W. C. Brögger, Die Eruptivgesteine des Kristianiagebietes. IV. Das Fengebiet in Telemark, Norwegen. Videnskapselskapets Skrifter I. Mat.-naturv. Klasse 1920, No. 9, besonders S. 194 u. f., 334 u. f.

[5]) R. Brauns, N. Jahrb. f. Min. 1913, Beil. Bd. 35, S. 202; 1922, Beil. Bd. 46, S. 72, 110. — Die Mineralien der Niederrheinischen Vulkangebiete. Stuttgart 1922, S. 111.

[6]) S. J. Shand, The nepheline rocks of Sekukuniland. Transact. geol. soc. S.-Africa 1921, Bd. 24, S. 144 u. f. — The igneous complex of Leeuwfontein, Pretoria-Distrikt. Ebenda, S. 233 u. f. — The problem of the alkaline rocks. Proc. of the Geol. soc. of S.-Africa 1922, S. XIX u. f.

[7]) P. Niggli, Die leichtflüchtigen Bestandteile im Magma. Preisschr. d. fürstl. Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig, 47. Leipzig 1920, S. 202 u. f.

[8]) N. L. Bowen, The behavior of inclusions in igneous magmas.

auch auf die experimentellen Untersuchungen von Niggli über die Einschmelzung von Kalk bei niederen Temperaturen[1]) und die neueren, noch nicht veröffentlichten Untersuchungen von Eitel bei höheren Temperaturen, über welche dieser auf der Tagung der Deutschen Mineralogischen Gesellschaft in Leipzig vortrug. Nicht vergessen werden darf dabei der ausführlichen Besprechung dieser Frage der Aufschmelzung von Carbonatgesteinen durch Daly.[2]) Zweifellos gibt die ältere Literatur weiteres über die Injektion des syenitischen Magmas in Carbonatgesteine. Manche Angaben findet man bei Daly, aber es ist nicht notwendig, alle im einzelnen anzuführen. Deutungsversuche nach der hier gegebenen Richtung bietet die ältere Literatur wenig; die synthetischen Versuche aber geben eine Bestätigung meiner theoretischen Auffassung der Feldbeobachtungen, so daß ich glaube, einen richtigen Deutungsweg gefunden zu haben. Die Aufschmelzung in Verbindung mit der Injektion in geeignete Schichtkomplexe bietet für die Platzaustauschfrage wichtige Schlüsse. Hierbei sei unter weiterer Anführung von Angaben von R. Brauns darauf hingewiesen, daß in unserem Falle nicht nur eine Aufschmelzung der Carbonate, sondern auch eine Dissoziation eingetreten ist, die auf der einen Seite zu besonderen Bestandteilen der Eläolithsyenitpegmatite, auf der anderen zu den sekundären leichtflüchtigen Bestandteilen des Magmas führte. Daß Dissoziation eintreten konnte, hängt mit der geringen Tiefe des Intrusionsniveaus zusammen (vgl. S. 281). — Mit diesem Vergleiche, der die geologischen Verhältnisse nur behandeln sollte, kann ich eine Besprechung der auch sehr interessanten chemischen und mine-

---

Journ. of Geol. 1922, Bd. **30**, S. 513 u. f. — The reaction principle in petrogenesis. Ebenda, S. 177 u. f. Sowie ältere Schriften desselben.

[1]) P. Niggli, Gleichgewichte zwischen TiO_2 und CO_2, sowie SiO_2 und CO_2 in Alkali-, Kalk-Alkali und Alkali-Aluminatschmelzen. Zeitschr. f. anorgan. Chemie 1916, Bd. **98**, S. 242—326.

[2]) R. A. Daly, Igneous rocks and their origin. New-York 1914. Genesis of alkaline rocks. Journ. of Geology 1918, Bd. **26**, S. 97—134. Neben anderen Schriften desselben Verfassers.

ralogischen Einzelheiten nicht verbinden, die ich dem Hauptwerke meiner südwestafrikanischen Untersuchungen vorbehalte.[1])

Wie an den unteren Dolomiten, so tritt eine Beeinflussung des Magmas durch die Assimilation an den quarzführenden höheren Stufen der Namaformation auf, sehr viel weniger eine schichtige Injektion, als eine unregelmäßige Durchtrümerung der dickbankigen Quarzite und Sandsteine. Nur in eingeschalteten Tonschiefern sehen wir Apophysen der Schichtlinie folgen. Die Bildung einer breccienartigen Kontaktzone ist aber ähnlich wie am Kontakte gegen die unteren Dolomite, während Beeinflussung der Zusammensetzung viel ungleichmäßiger ist. Am Kontakte gegen die Quarzite und Sandsteine mit den ihnen eingelagerten Tonschiefern sind einmal die dunklen Gemengteile angereichert zu glimmerreichen Gesteinen, andererseits zu hornblendereichen Gesteinen. Dann wieder treten die dunkeln Gemengteile stark zurück, so daß also diese Assimilationszone sehr große Unregelmäßigkeit zeigt. Die Aufnahme von Kieselsäure führt bis zur Ausbildung von quarzführenden Gesteinen, reinen Alkaligraniten in kleinen Apophysen, kleinen Stöcken in der Kontaktzone. Ein Teil dieser Injektionen im Nebengestein stellt abgequetschte Lösungsreste dar, die aus der durch Assimilation gebildeten Mischschmelze fortgeführt sind. Kleine, unregelmäßig begrenzte, diskordant die Quarzite durchsetzende Apophysen sind so ebenso entstanden, wie konkordant in die höheren bändrigen Dolomite injizierte Gesteine. Diese abgequetschten Lösungsreste sind nicht nur diskordant in das Nebengestein eingepreßt in gleichem Niveau, sondern sind auch passiv in Aufblätterungsfugen der höheren Stufe injiziert, ohne daß dabei die abweichende chemische Zusammensetzung dieser höheren Schichten eine erneute Umbildung der magmatischen Lösung bedingte.

Innerhalb des Syenitstockes war mir an der Oberfläche schon bei der ersten kurzen Besichtigung des Granitbergs (1914) eine ausgedehnte Zone aufgefallen, die aus einer

---

[1]) Vgl. Anm. 1, S. 260.

Mischung der verschiedenartigen Komponenten besteht, von denen ich bereits vor dem Kriege Proben zugesandt erhalten hatte, ohne sie deuten zu können. Ein meist dunkles, flächenhaft ausgebreitetes Gestein mit vielen eingeschlossenen, stark metamorphosierten Bruchstücken wechselnder Zusammensetzung zeigt sich verkittet durch ein schwankendes magmatisches Bindemittel, selbst wieder der wechselvollsten Beschaffenheit. Ich wies bereits früher darauf hin, daß es sich um eine Aufschmelzungszone handle, an einer auf dem Syenitstock befindlichen Scholle vom Dache des Stockes, die z. T. noch erhalten ist, z. T. aber abgetragen, so daß nur die innere Kontaktzone des Syenits an dieser Scholle erhalten blieb. Abbildung 1 deutet diese Scholle an, gibt aber nicht die Aufschmelzungszone in der Nachbarschaft. Die Einzelerscheinungen müssen auf der dem Hauptwerke[1]) beigegebenen Spezialkarte eingesehen werden. Die Scholle ist nicht groß, dagegen viel größer die Ausdehnung der Assimilationszone innerhalb des Syenitstockes.

Endlich treten unter den Gängen innerhalb des Stockes meist konzentrisch zum äußeren Salbande verlaufende Gänge auf, die mit einem ganz ähnlichen, gemischten Gesteine gefüllt sind. In stellenweise bis 10 m mächtigen Gangausfüllungen sind die verschiedenartigsten, selbst immer wieder hochmetamorphen Gesteinsbrocken der verschiedensten Zusammensetzung durch ein wechselndes magmatisches Bindemittel miteinander verbunden, das sowohl nach Mineralbestand, Struktur wie Textur ständig, auf kleinste Entfernung hin, sich ändert. Zwischen den Einschlüssen sieht man einmal normal eläolithsyenitisches Magma, dann porphyrische Füllmassen, dann aplitische, wiederum pegmatitische Ausbildungsformen, hier an dunklen Gemengteilen reiche, ebenso rasch wechselnde, wie weiterhin an dunklen Gemengteilen arme Füllmassen. Kein einheitliches Gestein liegt in den Adern zwischen den mehr oder weniger stark resorbierten Einschlüssen vor. Gesteins-

[1]) Anm. 1, S. 260.

bestimmungen von nahe beieinander liegenden Vorkommen ergeben ebenso wechselnde Diagnose wie chemische Analyse der verschiedenen Stücke. Ich kann auch diese Gangausfüllungen nur als Mischgesteine, hybride Gesteine auffassen. Woher aber sind sie gekommen? Wir haben am Kontakte der unteren Dolomite die große Assimilation gesehen, beobachtet wie an dem quarzitischen Nebengesteine eine ähnliche Aufschmelzung eingetreten ist. Resurgente Gase sind sowohl am Kontakte der unteren Dolomite wie Quarzite in das Magma eingetreten und gaben Veranlassung zu den sekundären leichtflüchtigen Bestandteilen, die selbst wieder zu Intrusionsvorgängen des Mischmagmas außerhalb der Assimilationszone in das weiter abliegende Nebengestein führten. Ebenso wie eine Injektion in das Nebengestein erfolgte, so trat auch *eine Injektion dieser hybriden Gesteine in die höher gelegenen, bereits verfestigten Teile auf Klüftungsfugen des magmatischen Körpers* selbst ein. So sind diese konzentrisch verlaufenden, mit hybriden Gesteinen gefüllten Gänge als Intrusionsfugen aufzufassen eines in der Tiefe gebildeten Mischmagmas, dessen Auftriebskraft durch die in das Magma neu übertretenden leichtflüchtigen Bestandteile bedingt wurde. Somit war *die Aufschmelzung und Assimilation des Nebengesteins* nicht nur in der nächsten Nachbarschaft, sondern auch *auf weitere Erstreckung hin für den Intrusionsmechanismus bedeutsam.* Die in der Aufschmelzungszone nicht vollständig gelösten Körper von Nebengesteinsbruchstücken brauchen also nicht, wie es so oft bei Diskussionen über die Aufschmelzungshypothese betont wird, als schwere Bestandteile in die Tiefe zu sinken, sondern sie können auch, gerade durch den Eintritt resurgenter Gase, in höhere Gebiete aufgetrieben werden. *Die Assimilation in unserem Falle führt zu einer Massenvermehrung innerhalb des magmatischen Körpers, aber auch zu einer Massenabfuhr, zu einer Platzschaffung durch den magmatischen Aufschmelzungsvorgang.* Ist der magmatische Körper noch nicht vollständig erstarrt, so wird es durch den Auftrieb der sekundären leicht-

flüchtigen Bestandteile zu schlierenartigen Massen in dem erstarrten Magma kommen, in unserem Falle aber, in dem bei diesem Auftrieb höhere Teile bereits erstarrt waren, kam es zu Kluftausfüllungen. Ich bezeichne diese Gangausfüllungen als hybride Ganggesteine. Wenn man ähnliche schlierenartige Vorkommen und Gangausfüllungen von demselben Gesichtspunkte aus betrachtet, so würden sich sicher noch viele Beispiele zu dieser Erklärung finden. Ich glaube als sicher annehmen zu müssen, daß durch die einseitige, von der Handstückspetrographie betriebene, damit sehr theoretische petrographische Erforschung magmatischer Vorgänge manches Belegstück für diese Auffassung falsch gedeutet worden ist. Derartige Vorgänge können nur durch petrographisch-geologische, sagen wir kurz, petrogenetische Untersuchungen der Erklärung näher geführt werden. — In unserem Falle des Granitbergs fällt noch auf, daß diese konzentrisch zum Salbande des ganzen Stocks verlaufenden Gänge ihre Hauptverbreitung an der Nord- und Ostseite des Stockes haben (angedeutet in Abb. 2). Die Aufschlüsse in der Assimilationszone an den unteren Dolomiten liegen an der Nordostseite. Mit ihnen hängen die Gangausfüllungen nicht zusammen. Die Injektion erfolgte im wesentlichen von der gegenüber liegenden Seite aus, wo sekundäre, leichtflüchtige Bestandteile in größerer Zahl in die Schmelze übertraten, dort, wo eine mächtigere Folge von Quarziten auch heute noch am Kontakte aufgeschlossen ist. In die Fugen eines kuppelförmigen, rund umlaufenden Gewölbes drangen die neu injizierten Massen auf der Gegenseite in die höheren Teile der sich bereits verfestigenden Kuppel ein.

Mit diesem an die Beobachtungen sich anschließenden Erklärungsversuche hat der Assimilationsvorgang eine ganz wesentliche Bedeutung nicht nur für die Injektion, sondern auch für die Platzaustauschfrage gewonnen.

Beide miteinander verglichene Beispiele zeigen eine weitgehende Assimilation. In der Serra de Monchique sind die Assimilationsprodukte in den allgemeinen tektonischen Bau des Injektionskörpers eingeordnet; sie folgen dort den äußeren Be-

grenzungslinien des unter Druck stehenden Injektionskörpers. Am Granitberg sehen wir eine ähnliche Parallelität in der äußeren Zone nur insoweit, daß überall Assimilation erfolgt, aber eine Anordnung der Assimilationsreste parallel den Grenzflächen liegt nicht vor. Im inneren Kern können wir erst recht nicht eine durch die äußeren Grenzverhältnisse gerichtete Anordnung der Assimilationserscheinungen nachweisen.

4. Differentiationserscheinungen.

Ein Teil der früher in der Serra de Monchique als Differentiation gedeuteten Erscheinungen fällt nach dem vorhergehenden unter Assimilation. Damit ist aber nicht jegliche Differentiation für die Serra de Monchique geleugnet. Zunächst bleiben die eigenartigen Unterschiede in dem ganzen Phakolithen, der Reichtum an femischen Bestandteilen am südlichen und südöstlichen Rande, Überwiegen pulaskitischer Ausbildung am Nordrande. Hier können wir einen Differentiationsvorgang im großen sehen, indem in dem steil gestellten Phakolithen uns verschiedene Differentiationsräume in demselben Denudationsquerschnitte entblößt entgegen treten. Hierin kann recht wohl eine Gravitationsdifferentiation vorliegen, eine Anreicherung von femischen Bestandteilen am liegenden, von salischen Bestandteilen am hangenden Salbande.

Weitere Differentiation sehen wir in den Gangausfüllungen. Die älteste Injektion in die Fugen des Nebengesteins liefert im wesentlichen bostonitische, dem Nebengestein konkordant eingeschaltete Injektionskörper. Im Innern des Massivs sehen wir syenitische, aplitische und pegmatitische neben tinguaitischen Gängen sowohl parallel der Streckung des Phakolithen, wie auch Tinguaite schon senkrecht dazu. Die jüngsten Gangausfüllungen basischer Natur, die Camptonite und Monchiquite als letzte Zeichen aufsteigender Differentiationsprodukte im erstarrenden Körper, zeigen sich in verschiedenen, zueinander senkrechten Klüftungen dem Injektionskörper eingeschaltet. Nach allem, was ich in der Serra de Monchique beobachtete, muß dort eine ziemlich einheitliche Differentiation erfolgt sein,

mit einem am längsten beweglich gebliebenen basischen Differentiationsprodukte. Das scheint mir auf einen verhältnismäßig einheitlichen, kleinen Injektionskörper hinzuweisen, was ja gerade einer phakolithischen Intrusion mit geringfügigen Zufuhrkanälen entsprechen würde.

An dem Granitberg und ebenso an den anderen Syenitvorkommen der südlichen Namib sehen wir Differentiationsprodukte innerhalb der Stöcke an der heutigen Denudationsoberfläche höchstens ganz verschwindend nebeneinander aufgeschlossen. Das heutige Denudationsniveau entblößt uns in dem eläolithsyenitischen Gesteine nicht verschiedenartige Differentiationsteile wie die Serra de Monchique. Differentiationserscheinungen sehen wir an den Namibsyeniten nur in den mannigfachen Gangausfüllungen. In einer Unzahl durchschwärmen die Gänge die Stöcke selbst, wie deren Umgebung. Namentlich das zwischen Granitberg und Signalberg-Schlueberg befindliche Gebiet von 20 km Länge ist von zahlreichen, nach verschiedener Richtung streichenden Gängen durchsetzt. Ob ein Teil nicht mit einem unter dem Meere jetzt verborgenen Syenitmassiv in Verbindung steht, wissen wir nicht. Die Wüstenverhältnisse ließen es zu, eine sehr viel größere Zahl von Gangdurchkreuzungen entweder direkt zu beobachten oder aus einer flachen Sandüberdeckung, Schuttausfüllung oder sogar Kalküberkrustung auszugraben. Das Ergebnis war, daß im einen Falle die sauren Spaltungsprodukte, im anderen die basischen, im dritten wieder die hybriden Ganggesteine die jüngeren waren, in weiteren Fällen aber umgekehrt. Eine bestimmte Regel für das Alter der verschiedenen Gangausfüllungen gegeneinander ließ sich nicht feststellen. Wenn wir dabei bedenken, daß sogar ein Teil der durch Assimilation beeinflußten Gänge der hybriden Gangausfüllungen jünger ist, als die durch Differentiation hier wie anderwärts zu erklärenden Spaltprodukte, so kann das nur daran liegen, daß wir in den Gangausfüllungen dieses Gebietes die Differentiationsprodukte verschiedener Teufen vor uns haben, daß die Differentiation sich hier nicht in einem beschränkten kleineren magmatischen Körper vollzog, sondern

daß dieser in größere Teufe hinuntersetzt und uns hier nun Spaltungsprodukte verschiedener Teufen liefert. Wir haben hier Ausbisse eines größeren, aus der Durchschmelzung aus größerer Teufe her gebildeten fußlosen Körpers vor uns, in dem die Differentiation nicht ebenso wie in einem kleinen geschlossenen Injektionskörper sich vollzieht, sondern nach der Tiefe zu fortschreitet. In ihm kann sich nicht die Regel eines geschlossenen Differentiationskörpers einer konkordanten Injektion erkennen lassen. Als Arbeitshypothese kann ich natürlich eine solche Annahme nur aufstellen und es wäre sehr wünschenswert, wenn durch eingehendere petrogenetische Untersuchungen diese Annahme an anderen konkordanten und diskordanten Injektionskörpern nachgeprüft würde.

5. Das Injektionsniveau.

Bereits früher wurde darauf hingewiesen,[1]) daß aus dem Verhältnis der Injektionen des Granitbergs zu den von mir als gleichaltrig angenommenen Ejektionen der Phonolithe weiter landeinwärts gefolgert werden muß, daß das Eindringen des syenitischen Magmas am Granitberg in einer Tiefe von 500—600 m unter der damaligen Oberfläche anzunehmen ist. Über das Injektionsniveau der Eläolithsyenite in der Serra de Monchique wissen wir nichts. Aber aus dem ganzen Verbande mit den umgebenden gefalteten Schichten ist doch wohl zu schließen, daß die Injektion in einem wesentlich tieferen Niveau erfolgte, daß damit der Unterschied im Verhältnis der Injektionen und der eingeschlossenen Nebengesteinsbruchstücke an beiden Vorkommen zu der Tektonik der Umgebung ein Teufenunterschied ist. Damit würde vielleicht auch der wesentliche Unterschied gegenüber der Tektonik von Injektivmassen im Sinne von Cloos eine Erklärung finden. Das Abweichen von der Granittektonik anderer Injektivmassen am Granitberg würde dann einmal bedingt sein durch das höhere Injektionsniveau, durch die Nähe der damaligen Landoberfläche.

---

[1]) Anm. 1, Seite 258.

Hinzu kommt aber zweifellos, daß die Abweichungen gegenüber der Granittektonik bedingt sind durch die Durchschmelzerscheinungen, daß am Granitberg im Gegensatz zu der Serra de Monchique das Magma aktiv an der Raumgebung beteiligt war. Es liegt mir ferne, diesen Schluß auch schon auf andere Vorkommen zu übertragen, anzunehmen, daß ganz allgemein ein höheres Injektionsniveau Abweichen von der Tektonik anderer Tiefenkörper bedingt, oder daß Durchschmelzkörper eine andere Tektonik besitzen, als mit der Faltung zusammenhängende Injektivmassen. Das müßte erst an vielen anderen Punkten auf Grund von genaueren geologischen Aufnahmen durchgeprüft werden.

6. Allgemeine Schlussfolgerungen.

Der Granitberg der südlichen Namib ist mindestens zum Teil ein Durchschmelzkörper, im ganzen aber unabhängig von Faltungsvorgängen in der Nachbarschaft. Das Magma ist aktiv an der Schaffung des Raumes beteiligt. Die Serra de Monchique ist der Form nach im wesentlichen durch Faltungsvorgänge in der Nachbarschaft bedingt. Aufschmelzungsvorgänge sind eingetreten, spielen aber nicht die gleiche Rolle wie an dem diskordanten Durchschmelzkörper des Granitberg. Das Magma ist im wesentlichen in einen vorgebildeten Hohlraum eingepreßt worden.

Durchschmelzkörper wie der Granitberg zeigen in den Kluft- und Streckrichtungen Abweichen von den durch die tektonischen Vorgänge der Umgebung bedingten geordneten Druckklüften der Granittektonik. Die Cloossche Untersuchungsmethodik bedarf hier einer gewissen Umgestaltung, die in ihren Einzelheiten nicht aus Untersuchungen gefolgert werden kann, bei denen eine Aufnahme Schritt für Schritt, wie sie Cloos in so umsichtiger Weise durchführt, nicht erfolgt ist.

Die Aufschmelzungen führen zu einer Injektion des Magma, stellenweise unter erheblicher Beteiligung von aus dem Nebengestein herrührenden Fremdkörpern. Daraus wird ein besonderer Typus von (hybriden) Ganggesteinen abgeleitet, der neben

die Gangausfüllungen mit dem Magma selbst und mit den Spaltungsprodukten desselben tritt, so daß wir drei verschiedene Typen von Gangausfüllungen zu unterscheiden haben, wobei selbstverständlich diese nicht nur in Gangform aufzutreten brauchen.

An dem Vergleiche der beiden Beispiele wird gezeigt, wie Abweichen von der normalen Differentiationsfolge vielleicht daraus eine Erklärung findet, daß bei diskordanten, fußlosen Durchschmelzkörpern die Differentiation mit der Teufe fortschreitet, während sie in geschlossenen Magmakörpern einheitlich erfolgt.

Einen Überblick über die wesentlichsten Gegensätze gibt folgende Zusammenstellung:

<table>
<tr><th>Serra de Monchique.</th><th>Namib Südwestafrikas.</th></tr>
<tr><td>Injektionsverband: konkordant.</td><td>Diskordant.</td></tr>
<tr><td>Phakolith.
Magma nicht an der Raumbildung beteiligt.</td><td>Z. T. Durchschmelzkörper, aktiv an der Raumbildung beteiligt.</td></tr>
<tr><td>Klüfte und Gänge: Abhängig von der Faltung.</td><td>Abhängig von rein magmatischen und postmagmatischen Vorgängen.</td></tr>
<tr><td>Assimilation am Salbande und in Zonen parallel zur Haupterstreckung des Phakolithen innerhalb desselben.</td><td>Assimilation am Salbande, in akkordanten Injektionsfugen und an unregelmäßiger „Scholle vom Dache“ des Durchschmelzkörpers.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Assimilation führt in beiden Fällen zur Ausbildung hybrider Mischgesteine.</td></tr>
<tr><td>Assimilation erfolgt vor und bei der Verfestigung des geschlossenen Intrusionskörpers.</td><td>Assimilation erfolgt in dem fußlosen Durchschmelzkörper nacheinander in verschiedenen Niveaus.</td></tr>
</table>

Hybride Mischgesteine bleiben am Orte der ersten Entstehung.	Werden z. T. in höhere Räume, z. B. Kluftsysteme, unter dem Einfluß sekundärer, leichtflüchtiger Bestandteile (resurgenter Gase) injiziert als *hybride Ganggesteine.*
Differentiation ist normal:	Differentiation scheinbar anormal:
Basische Ausfüllungen der Gänge jünger als saure.	Saure Injektionen noch jünger als basische; hybride Ganggesteine ebenfalls wechselnd in der Zeit der Injektion.

Abschätzung von Funktionen grosser Zahlen.

Von Georg Faber.

Vorgelegt in der Sitzung am 4. November 1922.

Den Anlaß zu der folgenden Abhandlung gab das Bestreben, die Entwickelbarkeit gegebener Funktionen (sowohl einer komplexen wie insbesondere auch einer reellen Veränderlichen) zu untersuchen, welche nach Art der Fourierschen Reihen gebildet sind und nach gewissen Polynomen, insbesondere nach Hermiteschen $U_n(x)$ und nach Laguerreschen $L_n(x)$ fortschreiten.[1] Beide Arten Polynome sind Grenzfälle der Legendreschen:

$$1)\qquad X_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n};$$

die nach Legendreschen Polynomen zu entwickelnde Funktion hat man als im Intervalle $-1, +1$ definiert anzusehen; verhält sie sich außerdem in allen Punkten dieses Intervalls, auch in den Endpunkten regulär, so konvergiert die Entwickelung im Innern einer Ellipse, deren Brennpunkte ± 1 sind und auf der mindestens eine singuläre Stelle der Funktion liegt. Bei den Hermiteschen Polynomen

$$2)\qquad U_n(x) = e^{\frac{x^2}{2}}\,\frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n}$$

ist das Intervall $-1, +1$ auf $-\infty, +\infty$ ausgedehnt, wobei die konfokalen Ellipsen in Parallelenpaare zu beiden Seiten

[1] Hermite, C. R. 58 (1864), S. 93. — Laguerre, Bull. de la Soc. math. de France 7 (1879) = Oeuvres I, S. 428. Beide Benennungen sind insofern ungerechtfertigt, als beide Arten Polynome schon vorher von Tschebyscheff untersucht worden sind: Bull. phys.-math. de l'Acad. de St. Pétersbourg 1 (1859) = Oeuvres I, S. 501.

der reellen Achse übergehen. Dagegen hat man es bei den Laguerreschen Polynomen

$$3)\qquad L_n(x) = e^x \frac{d^n x^n e^{-x}}{d x^n} \cdot \frac{1}{n!}$$

mit dem Intervall 0, ∞ und mit konfokalen Parabeln zu tun.

Die Polynome $U_n(x)$ und $L_n(x)$ treten auch als Koeffizienten gewisser Reihenentwickelungen auf:

$$4)\qquad e^{-\frac{1}{2}(x+h)^2} = e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_0^\infty {}^n \frac{h^n}{n!} U_n(x)$$

(folgt ohne weiteres aus (2)),

$$5)\qquad \frac{1}{(1-z)^{m+1}} e^{\frac{z}{1-z}} = \sum_0^\infty {}^n L_n(x) z^n.$$ [1]

Ich zeige nun, wie man für diese und andere Koeffizienten asymptotische Ausdrücke finden kann mit relativen Fehlern der Ordnung $1/n^\nu$, wo ν jede ganze positive Zahl sein kann. Ist dies geschehen, so kann die eingangs erwähnte Untersuchung nach dem von Darboux[2] gegebenen Vorbilde leicht durchgeführt werden; die Unendlichkeit der Intervalle macht keine Schwierigkeit. Der hier angegebene Weg dürfte dem über die Theorie der Integralgleichungen führenden[3] in vieler Hinsicht vorzuziehen sein. Er führt auch bei den allgemeineren in dem Burkhardtschen Berichte,[4] S. 900—903 erwähnten Polynomen $U_n^{(c)}(x)$, $T_n^{(m)}(x)$ zum Ziel. Ich zeige im folgenden nur, wie man die nötigen asymptotischen Darstellungen finden kann; deren Verwendung für die Untersuchung von Reihenentwickelungen nach dem Darbouxschen Vorbilde ist dann eine leichte und lohnende Aufgabe; ich selbst verzichte darauf, sie durchzuführen.

---

[1]) Sonin, Math. Ann. 16 (1880), S. 42: vgl. A. Gegenbauer, Wien. Ber. 95₂ (1887), S. 274.

[2]) Darboux, Journ. de math. (3) 4 (1878).

[3]) Myller-Lebedeff, Math. Ann. 64 (1907), S. 388.

[4]) Jahresbericht der D. Math.-Ver. 10₂ (1908); daselbst auch weitere Literaturangaben.

§ I. Auseinandersetzung des Verfahrens.

Die Ergebnisse und Anwendungen meines Abschätzungsverfahrens dürften neu sein. Sein Grundgedanke ist es, wie ich nachträglich merkte, nicht; es hat ihn schon Riemann, wie H. A. Schwarz aus Notizen in dessen Nachlaß herausfand,[1]) benützt, vielleicht beeinflußt durch verwandte Überlegungen bei Laplace. Dieser Grundgedanke besteht in folgendem:

$f(z) = f(\xi + i\eta)$ sei eine analytische Funktion; z_0 sei eine einfache Nullstelle der Ableitung $f'(z)$ und es sei $f(z_0) \neq 0$. Die Funktion $f(z)$ gestattet dann in der Umgebung der Stelle z_0 eine Entwickelung der Form:

$$f(z) = f(z_0)\left[1 + \frac{f''(z_0)}{2f(z_0)}(z - z_0)^2 + \cdots\right], \tag{6}$$

und es gibt durch z_0 zwei aufeinander senkrechte Gerade g_1, g_2 von folgender Eigenschaft: auf g_1 und g_2 ist $(z - z_0)^2 f''(z_0) : 2f(z_0)$ reell und zwar positiv auf g_1, negativ auf g_2.

Hat man nun

$$\int_C f(z)\,dz \tag{7}$$

zu bilden längs einer Kurve C, die durch z_0 geht und in diesem Punkte g_2 zur Tangente hat, so nimmt $|f(z)|$ im Punkte z_0 einen größeren Wert an als in allen auf C gelegenen Nachbarpunkten z und man erhält unter Umständen einen Näherungswert für das Integral (7), wenn man von dem ganzen Integrationswege C nur eine gewisse Umgebung der Stelle z_0 beibehält. Diese Überlegungen gelten auch dann noch, wenn die Tangente an C in z_0 nicht mit g_2 zusammenfällt, sondern mit g_2 einen Winkel bildet, der dem Betrage nach $< \pi/4$ ist; auch darf an Stelle des Punktes z_0 ein Nachbarpunkt gewählt werden. Durch die so noch vorhandene große Bewegungsfreiheit läßt

[1]) Riemanns Werke, 2. Aufl., S. 429. Eine andere Anwendung des Grundgedankens machte Herr Debye, Math. Ann. 67 (1909), S. 537.

sich das Verfahren den einzelnen Anwendungen anpassen. Als Integrationsweg wird man meist eine Strecke mit dem Mittelpunkte z_0 oder einen Kreisbogen wählen können. Dann hat man es, wenn t eine reelle Veränderliche und β eine positive Zahl bedeutet, schließlich mit einem Integrale der folgenden Form zu tun:

$$8) \qquad f(z_0) \int_{-\beta}^{+\beta} (1 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots)\, dt.$$

Wenn z_0 genau eine Nullstelle der Funktion $f'(z)$ ist, so ist $a_1 = 0$; doch machen wir diese Voraussetzung nicht, auch nicht die, daß g_2 Tangente von C und dementsprechend a_2 reell und negativ sei; doch verlangen wir, daß der Realteil

$$9) \qquad \Re(a_2) < 0$$

sei; gelegentlich würde auch die Annahme

$$(9') \qquad \Re(a_2) \leqq 0$$

genügen. Das Integral (8) bringen wir auf die Form:

$$10) \qquad f(z_0) \int_{-\beta}^{+\beta} e^{a_1 t + a_2 t^2} (1 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots)\, dt,$$

wo also $1 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots$ die Potenzreihe für das Produkt

$$e^{-a_1 t - a_2 t^2} (1 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots)$$

ist. Danach wäre $b_1 = 0$; doch wollen wir zulassen, daß die Koeffizienten a_1, a_2 in (10) nur annähernd die gleichen sind wie in (8), so daß nicht notwendig $b_1 = 0$ sein muß.

Dagegen machen wir im Hinblick auf die beabsichtigten Anwendungen folgende Voraussetzungen (die sich leicht durch allgemeinere ersetzen ließen):

$f(z)$ und damit die Koeffizienten in (8), (10) hängen noch von einem positiven Parameter n ab, der über alle Grenzen wächst, und es sei für $n \longrightarrow \infty$:

$$11) \qquad \lim |a_2| = \infty,$$

$$12) \qquad \overline{\lim}\, \Re(a_2) : a_2| < 0, \text{ etwa } = -2\gamma,$$

13) $\overline{\lim}\, |a_1^2| : |a_2| \neq \infty$, sondern etwa $= \Gamma^2 (\geqq 0)$,

14) $\overline{\lim}\, |b_\nu| : |a_2^\nu|^{1/2 - \alpha} \neq \infty$ für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

und für eine positive Zahl α; ferner von einem gewissen Werte des Parameters n ab:

15) $$\beta > (\lg |a_2|)\, |a_2|^{-1/2},$$

16) $$\beta < (\lg |a_2|)^2\, |a_2|.$$[1])

Der Fehler, der dadurch entsteht, daß der Wert J des Integrals (7) durch das Integral (10) ersetzt wird, sei gleich $|J|\, o(|a_2|^{-\nu})$, wie groß auch ν sei. Relative Fehler dieser Ordnung, für die ich kurz $O(|a_2|^{-\omega})$ schreibe, werden bei unserer asymptotischen Darstellung nicht mehr mitberücksichtigt, sondern nur solche der Ordnungen $O(|a_2|^{-\nu})$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$.

Wir stellen nun einige Formeln zusammen, indem wir von der bekannten Beziehung

17) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{a_2 t^2} = \sqrt{\frac{\pi}{-a_2}}$$

ausgehen; es genügt, dieselbe für reelle negative a_2 zu beweisen, sie gilt, da beiderseits analytische Funktionen von a_2 stehen, dann ganz von selbst für alle a_2 mit $\Re(a_2) \leqq 0$. Unter der Quadratwurzel ist der Hauptwert mit positivem Realteil zu verstehen. Wir setzen im folgenden $\Re(a_2) < 0$ voraus und erhalten durch k malige Differentiation von (17) nach a_2:

18) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{a_2 t^2} t^{2k}\, dt = \frac{(2k)!}{2^{2k} k!} \frac{1}{(-a_2)^k} \sqrt{\frac{\pi}{-a_2}}.$$

Hieraus ergibt sich nach Multiplikation mit $a_1^{2k} : (2k)!$ und Summation nach k:

19) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{a_1 t + a_2 t^2}\, dt = \sqrt{\frac{-\pi}{a_2}}\, e^{-\frac{a_1^2}{4 a_2}}.$$

[1]) Und selbstverständlich kleiner als der Konvergenzradius der auf der rechten Seite von (10) vorkommenden Reihe.

Endlich findet man aus dieser Formel durch k malige Differentiation nach a_1 mit Beachtung von (2):

$$20)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{a_1 t + a_2 t^2}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{-a_2}}\, e^{-\frac{a_1^2}{4a_2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)^k U_k\left(\frac{a_1}{\sqrt{2a_2}}\right)$$

mit beliebiger Bestimmung der Quadratwurzel $\sqrt{2a_2}$, die beim Ausmultiplizieren der rechten Seite nur mit geraden Eponenten auftritt.

Nach (13), (19) ist also

$$21)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{a_1 t + a_2 t^2}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{a_1 t + a_2 t^2}\, dt\, O\left(|a_2|^{-\frac{k}{2}}\right).$$

Man beweist ferner leicht, daß wegen (15) die Differenz

$$22)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{a_1 t + a_2 t^2}\, dt - \int_{-\beta}^{+\beta} t^k e^{a_1 t + a_2 t^2}\, dt = O(|a_2|^{-\omega})\,^{1)}$$

und also auch

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{a_1 t + a_2 t^2}\, dt\, O(|a_2|^{-\omega}) = \int_{-\beta}^{+\beta} e^{a_1 t + a_2 t^2}\, dt\, O(|a_2|^{-\omega}) \text{ ist,}$$

woraus wegen (21) folgt

$$23)\quad \int_{-\beta}^{+\beta} t^k e^{a_1 t + a_2 t^2}\, dt = \int_{-\beta}^{+\beta} e^{a_1 t + a_2 t^2}\, dt\, O\left(|a_2|^{-\frac{k}{2}}\right).$$

Die Differenz (22) ist nämlich dem Betrage nach kleiner als[2])

---

[1]) Danach ist, wenn von vornherein relative Fehler der Ordnung $O(|a_2|^{-\omega})$ außer Betracht bleiben, die durch (16) geforderte Beschränkung von β nach oben hin bedeutungslos; sie hat nur den Zweck, eine spätere Rechnung (S. 291) abzukürzen.

[2]) Falls $\beta \geqq 1$, entfällt das erste Integral auf der rechten Seite von (24).

$$24)\qquad 2\int_{\beta}^{\infty} t^k e^{|a_1| t + \Re(a_2) t^2}\, dt$$

$$< 2\int_{\beta}^{1} e^{(|a_1| + \Re(a_2)\beta)t}\, dt + 2\, e^{2/3\,\Re(a_2)} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2k} e^{|a_1| t + 1/3\,\Re(a_2) t^2}\, dt$$

$$< 2\, e^{(\Gamma |a_2|^{1/2} - \gamma |a_2|^{1/2} \lg |a_2|)\, |a_2|^{-1/2} \lg |a_2|} + e^{-\gamma |a_2|}\, O(|a_2|^{-k-1/2})$$

(wegen (12), (13), (15) für große $|a_2|$), (wegen (12), (21))

$$= O(|a_2|^{-\omega}).$$

Wenn man das Integral von (10) ersetzt durch

$$25)\qquad \int_{-\beta}^{+\beta} e^{(a_1 t + a_2 t^2)} (1 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_k t^k)\, dt,$$

so entsteht ein Fehler, der dem Betrage nach kleiner ist als

$$26)\qquad \left| \int_{-\beta}^{+\beta} b_{k+1} e^{a_1 t + a_2 t^2} t^{k+1}\, dt \right| + \sum_{k+2}^{\infty} |b_\nu| \beta^\nu \cdot 2 \int_{0}^{\beta} e^{|a_1| t + \Re(a_2) t^2}$$

$$< \left| \int_{-\beta}^{+\beta} e^{a_1 t + a_2 t^2}\, dt \right| O\left(\frac{|b_{k+1}|}{|a_2|^{\frac{k+1}{2}}} \right) + O(|a_2|^{-(k+2)\alpha} \lg |a_2|^{k+2})\, O(|a_2|^{-1/2})$$

(nach (23)) (nach (14), (16), (19), (12), (13))

$$= \int_{-\beta}^{+\beta} e^{a_1 t + a_2 t^2}\, dt\; O(|a_2|^{-(k+1)\alpha}) \text{ (wegen (14)).}$$

Die Ersetzung von (10) durch (25) geschieht also mit einem relativen Fehler der Ordnung $O(|a_2|^{-(k+1)\alpha})$ und diese Ordnung des relativen Fehlers wird nach (22) nicht geändert, wenn man in (25) die Grenzen auf $-\infty$, $+\infty$ ausdehnt. Dann aber (und das ist der Zweck dieser Veränderung der Integrationsgrenzen) läßt sich (25) in geschlossener Form auswerten und man gewinnt also, indem man

$$27)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{a_1 t + a_2 t^2} (1 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots)\, dt$$

gliedweise integriert, für (10) und damit auch für (7) eine asymptotische Reihe, bei der relative Fehler der Ordnung $O(|a_2|^{-\omega})$ vernachlässigt werden, während, falls nur genügend viele Reihenglieder benutzt werden, der relative Fehler unterhalb $O(|a_2|^{-\nu})$ bleibt, wie groß auch ν sei.

Man beachte noch, daß die Geltung der Voraussetzung (11): $\lim |a_2| = \infty$, falls sie von vornherein nicht erfüllt sein sollte, stets durch Einführung einer neuen Integrationsveränderlichen $t' = C_n^{-1} t$, wo $\lim C_n = \infty$, erzwungen werden kann. Es darf daher bei den Beispielen des nächsten Paragraphen gelegentlich auf die Voraussetzung (11) verzichtet werden (s. z. B. (29)).

§ 2. Anwendungen.

1. Zur Veranschaulichung meines Verfahrens leite ich mit seiner Hilfe die Stirlingsche Formel ab, indem ich von der Gleichung

$$\text{28)} \qquad \frac{1}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{e^z\, dz}{z^{n+1}}$$

ausgehe. C kann vorerst irgend eine den Nullpunkt umschließende Kurve sein; $f(z)$ ist $z^{-(n+1)} \exp z$, also $z_0 = n + 1$ die Nullstelle von $f'(z)$. Wir wählen aber, um größere Übereinstimmung mit der üblichen Formel zu erreichen, lieber den Näherungswert $z_0 = n$ und sodann C als Quadrat, dessen Seiten in die Geraden $\xi = \pm n$, $\eta = \pm n$ fallen. Wir begehen offenbar nur einen relativen Fehler $O(n^{-\omega})$, wenn wir von C nur die eine durch den Punkt $z = n$ gehende Quadratseite beibehalten. Setzen wir noch $z = n + it$, so geht (28) in folgende Näherungsformel über:

$$\text{29)} \qquad \begin{aligned} \frac{1}{n!} &\sim \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-n}^{+n} \frac{e^{n+it-n\lg(n+it)}}{n+it}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-n}^{+n} e^{n-n\lg n - \frac{t^2}{2n}} (1 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots)\, dt. \end{aligned}$$

Hier ist $1 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots$ die Potenzreihe für

$$30)\quad \left(1 + \frac{i t^2}{n}\right)^{-1} exp\left(\frac{i t^3}{3 n^2} + \frac{t^4}{4 n^3} - \frac{i t^5}{5 n^4} - \frac{t^6}{6 n^5} + \cdots\right).$$

Für die Berechnung des Integrals (29) kann man $b_1 = b_3 = b_5 = \cdots = 0$ setzen; für $b_{2\nu}$ findet man

$$31)\quad b_{2\nu} = O\left(n^{-\frac{2\nu}{3}}\right),$$

$$b_2 = -\frac{1}{n^2},\quad b_4 = \frac{7}{12 n^3} + \frac{1}{n^4},\quad b_6 = -\frac{1}{18 n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right).$$

Schließlich ergibt sich durch gliedweise Integration der Reihe auf der rechten Seite von (29) zwischen den Grenzen $-\infty$, $+\infty$ die asymptotische Reihe:

$$32)\quad \frac{1}{n!} \sim \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}\, n^n}\left(1 + n b_2 + \frac{3!\, n^2}{2 \cdot 1!} b_4 + \frac{5!\, n^3}{2^2 \cdot 2!} b_6 + \cdots\right)$$

$$= \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}\, n^n}\left[1 - \frac{1}{n} + 3 n^2\left(\frac{7}{12 n^3} + \frac{1}{n^4}\right) - \frac{n^3 \cdot 120}{8 \cdot 18 n^4} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$= \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}\, n^n}\left[1 - \frac{1}{12 n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right].$$

Statt, wie geschehen $z = n + it$ zu setzen (geradlinige Integration) hätten wir ebenso gut $z = n e^{it}$ setzen können; entsprechendes gilt für die folgenden Beispiele.

2. Als nächstes wählen wir die Hermiteschen Polynome, die wir in Übereinstimmung mit (4) so definieren:

$$33)\quad \frac{1}{n!} U_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{e^{-\frac{z^2}{2} - z x}}{z^{n+1}}\, dz;$$

es empfiehlt sich, wie wir gleich sehen werden, für C ein Quadrat von der Seitenlänge $2\sqrt{n+1}$ zu wählen, dessen Mittelpunkt der Nullpunkt ist und dessen Seiten zur reellen und imaginären Achse parallel laufen. Da jetzt

$$34)\quad f(z) = e^{-\frac{z^2}{2} - z x} : z^{n+1}$$

ist, haben wir die Gleichung $f'(z) = 0$, d. h.

$$35)\qquad z^2 + zx + n + 1 = 0$$

aufzulösen. Es genügt (und die Formeln werden dann sogar übersichtlicher), wenn wir die Wurzeln dieser Gleichung näherungsweise als

$$36)\qquad z_0 = i\sqrt{n+1}, \quad z_1 = -i\sqrt{n+1}$$

berechnen. Man sieht wieder leicht, daß man von dem quadratischen Integrationswege nur die Umgebungen dieser beiden Punkte beizubehalten braucht, wenn man relative Fehler der Größenordnung $O(n^{-\omega})$ von vornherein vernachlässigt. Man wird dann in diesen Umgebungen an Stelle von z eine neue Integrationsveränderliche durch

$$37)\qquad z = z_0 - t, \quad z = z_1 + t$$

einführen. $f(z)$ geht dadurch über in

$$38)\qquad \varphi(t) = exp\Big[\frac{n+1}{2} + it\sqrt{n+1} - \frac{t^2}{2} \mp ix\sqrt{n+1}$$
$$\pm xt - (n+1)\lg(\pm i\sqrt{n+1} \mp t)\Big].$$

Wir setzen noch

$$39)\ exp\left[(n+1)\sum_3^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu}\left(\frac{t}{i\sqrt{n+1}}\right)^\nu\right] = 1 + b_3\left(\frac{t}{i}\right)^3 + b_4\left(\frac{t}{i}\right)^4 + \cdots,$$

wobei sich

$$40)\qquad b_k = O\left(n^{-\frac{k}{6}}\right)$$

ergibt. Dann wird

$$41)\quad \varphi(t) = \frac{exp\left(\frac{n+1}{2} \pm xt \mp ix\sqrt{n+1} - t^2\right)}{(\pm i\sqrt{n+1})^{n+1}}\left(1 + b_3\left(\frac{t}{i}\right)^3\right.$$
$$\left. + b_4\left(\frac{t}{i}\right)^4 + \cdots\right).$$

Durch gliedweise Integration zwischen den Grenzen $-\infty$, $+\infty$ erhält man $\frac{1}{n!}U_n(x)$ als Summe zweier von den

Umgebungen der Stellen z_0, z_1 herrührender asymptotischer Reihen:

$$\frac{1}{n!}U_n(x) = \frac{e^{\frac{n+1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4}}}{2\sqrt{\pi}(\sqrt{n+1})^{n+1}} \left\{ i^n e^{ix\sqrt{n+1}} \left[1 + \sum_3^{\nu} \frac{b^{\nu}}{(\sqrt{2})^{\nu}} U_{\nu}\left(\frac{ix}{\sqrt{2}}\right)\right]\right.$$

$$\text{42)} \qquad \left. + (-i)^n e^{-ix\sqrt{n+1}} \left[1 + \sum_3^{\nu} \frac{b_{\nu}}{(\sqrt{2})^{\nu}} U\left(\frac{-ix}{\sqrt{2}}\right)\right]\right\}.$$

3. Das in § 1 auseinandergesetzte Verfahren führt immer zum Ziel, wenn es sich darum handelt, asymptotische Reihen für die Koeffizienten solcher ganzer transzendenter Funktionen zu finden, die man aus der Veränderlichen z und beliebigen Konstanten durch die eine beliebige Anzahl von Malen und in beliebiger Reihenfolge auszuführenden Operationen des Addierens, Multiplizierens und Erhebens in den Exponenten von e bilden kann.

Ich beschränke mich der Kürze halber auf die m fach iterierte Exponentialfunktion[1])

$$\text{43)} \qquad exp_m(z) = \sum_0^{\infty} {}^n A_n z_n$$

und auf die Angabe des Anfangs- und Hauptgliedes der asymptotischen Reihe für A_n. Man wird hier über eine Kreislinie $|z| = \varrho$ integrieren, von der man nur die Umgebung der positiven reellen Zahl ϱ zu berücksichtigen braucht. ϱ ist Wurzel der Gleichung

$$\text{44)} \qquad z\, exp\, z\, exp_2\, z \ldots exp_{m-1}\, z = n \quad \text{oder} \quad z\, exp'_{m-1}\, z = n,$$

und es ergibt sich[2])

$$\text{45)} \qquad A_n \sim \frac{exp_m\, \varrho}{\varrho^n} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\varrho^2\, exp''_{m-1}\, \varrho + n)}}.$$

4. Ob sich nach dem Verfahren des § 1 asymptotische Darstellungen auch für die Taylorkoeffizienten aller der trans-

---

[1]) Definition: $exp_1\, z = exp\, z = e^z$; $exp_m\, z = exp\,(exp_{m-1}\, z)$ für $m = 2, 3, \ldots$

[2]) Im Falle $m = 1$ reduziert sich Gleichung (44) auf $z = n$ und (45) auf die Stirlingsche Formel.

zendenten Funktionen finden lassen, die sich aus $1:(1-z)$ und Konstanten durch Addition, Multiplikation und Erheben in den Exponenten von e bilden lassen, vermochte ich in voller Allgemeinheit nicht zu entscheiden. Ich begnüge mich mit zwei Beispielen und wähle als erstes

$$46)\qquad exp_m \frac{1}{1-z} = \sum_0^\infty{}^n B_n z^n.$$

ϱ sei die zwischen 0 und 1 gelegene Wurzel der Gleichung

$$47)\qquad z\frac{d}{dz}\, exp_{m-1}\left(\frac{1}{1-z}\right) - (n+1) = 0, \text{ d. h.}$$

$$47')\ \frac{z}{(1-z)^2}\, exp\frac{1}{1-z}\, exp_2\frac{1}{1-z}\dots exp_{m-1}\frac{1}{1-z} = n+1.$$

Für $1:(1-\varrho)$ schreibe ich abkürzend P und wähle als Weg des Cauchyschen Integrals für den Koeffizienten B_n die zwei Kreislinien $|z| = 1+\varrho$ und $|1-z| = 1-\varrho$; die erste ist im positiven, die zweite im negativen Sinne zu umlaufen. Beizubehalten ist für die asymptotische Reihendarstellung nur die Umgebung des Punktes $z=\varrho$ auf der zweiten Kreislinie, ebenso gut kann über ein Stück der Tangente dieser Kreislinie im Punkte $z=\varrho$ integriert werden. Als Anfangs- und Hauptglied findet man

$$48)\qquad B_n \sim \frac{exp_m P}{\varrho^{n+1}\sqrt{2\pi\,(P^4\, exp''_{m-1}(P) + 2P^3\, exp'_{m-1}(P) + (n+1)\varrho^{-2})}}.$$

5. Als letztes Beispiel, durch welches zugleich die Frage nach der asymptotischen Reihe für die Laguerreschen Polynome miterledigt wird, wähle ich die Abschätzung der Koeffizienten C_n der Entwickelung

$$49)\qquad \frac{1}{(1-z)^l}\left(\lg\frac{1}{1-z}\right)^k exp\frac{s}{(1-z)^m} = \sum_0^\infty{}^n C_n z^n;\text{[1]}$$

---

[1]) Das Anfangsglied der asymptotischen Reihe für C_n im Falle $m=1$ hat schon Herr Perron gefunden. Archiv der Math. und Phys., 3. Reihe, Bd. 22 (1914), S. 329; daselbst auch Hinweis auf eine frühere Arbeit des Herrn Fejér.

l, k und s seien beliebige komplexe Zahlen (s jedoch $\neq 0$); m denken wir uns der Einfachheit halber positiv ganzzahlig. Zur Abkürzung nennen wir die Funktion (49) $F(z)$, ihren Faktor $exp\; s(1-z)^{-m}$ dagegen $F_1(z)$, ihren anderen Faktor $\varphi(z)$ ($= (1-z)^{-l}\; [\lg(1-z)^{-1}]^k$). Statt dieser Funktion $\varphi(z)$ konnte ebenso gut irgend eine andere aus der Klasse der Funktionen gewählt werden, die ich in einer früheren Abhandlung[1]) mit $\varphi(z)$, $\varphi_a(z)$ bezeichnet habe. Den Einfluß des Faktors $\varphi(z)$ kann man leicht hinterher in Rechnung stellen; wir betrachten vorerst bloß die Funktion $F_1(z)$ und haben, um das Cauchysche Integral für deren Taylorkoeffizienten abzuschätzen, nach der Vorschrift von § 1 die Gleichung

$$50)\qquad \frac{d}{dz}\,\frac{1}{z^{n+1}}\,exp\,\frac{s}{(1-z)^m}=0$$

aufzulösen. Setzt man $z = 1 + \zeta$, so geht diese Gleichung über in

$$51)\qquad (-\zeta)^{m+1}=\frac{1}{n+1}\,(ms+ms\zeta).$$

Ihre $(m+1)$ Wurzeln werden bei großem n sämtlich näherungsweise durch die Formel

$$52)\qquad \zeta=-\sqrt[m+1]{\frac{ms}{n+1}}$$

geliefert. Sehen wir von dem Falle eines reellen negativen s zunächst ab, so ist unter den $m+1$ Werten (52) e i n e r mit dem kleinsten Realteil (für reelles negatives s kämen zwei Werte in Frage); es hat daher auch von den $m+1$ Wurzeln der Gleichung (51), falls n groß und s nicht negativ reell ist, eine den kleinsten (notwendig negativen) Realteil; diese Wurzel von (51) bezeichnen wir mit

$$52)\qquad \zeta_0=|\zeta_0|\,e^{i\alpha}\qquad \left(\frac{\pi}{2}<\alpha\leqq\pi\right)$$

und setzen

---

[1]) Diese Berichte 1917, S. 263.

$$\zeta = \zeta_0 e^{i\varphi} \qquad (-\pi < \varphi \leq \pi), \tag{53}$$

d. h. wir betrachten die Punkte der Kreislinie $|1 - z| = |\zeta_0|$. Über diese Kreislinie im negativen Sinne und über die Kreislinie $|z| = 1 + |\zeta_0|$ im positiven Sinn ertrecken wir die Koeffizientenintegrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{F(z)}{z^{n+1}}\,dz \text{ und } \frac{1}{2\pi i}\int \frac{F_1(z)}{z^{n+1}}\,dz. \tag{54}$$

Wir zeigen dann: Wenn man relative Fehler der Ordnung $O(n^{-\infty})$ von vornherein vernachlässigt, so kann man das Integral über die zweite Kreislinie ganz weglassen und von dem über die erste Kreislinie braucht man nur die Umgebung der Stelle $\zeta_0 = z_0 - 1$ beizubehalten. Letzteres Integral ist ausgeschrieben folgendes (und zwar schreiben wir es gleich für die allgemeinere Funktion $F(z)$ (49), da die in dem einfachen Falle der Funktion $F_1(z)$ gefundenen Lösungen z_0, ζ_0 der Gleichungen (50), (51) ausreichende Näherungslösungen für den allgemeinen Fall bleiben):

$$\frac{1}{z_0^{n+1}}\,\frac{1}{(1-z_0)^{l-1}}\left(\lg\frac{1}{1-z_0}\right)^k exp\,\frac{s}{(1-z_0)^m}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} G(\varphi)\,d\varphi, \tag{55}$$

mit

$$G(\varphi) = (1-z_0)\,e^{i\varphi}\,\frac{F(1+\zeta_0 e^{i\varphi})}{(1+\zeta_0 e^{i\varphi})^{n+1}} : \frac{F(z_0)}{z_0^{n+1}} \tag{56}$$

$$= e^{i\varphi(-l+1)}\left[1 + \frac{i\varphi}{\lg(-\zeta_0)}\right]^k [a_1\varphi + a_2\varphi^2 + a_3\varphi^3 + \cdots],$$

wo

$$a_1\varphi + a_2\varphi^2 + a_3\varphi^3 + \cdots \tag{57}$$

$$=^{1)} \frac{s}{(-\zeta_0 e^{i\varphi})^m} - (n+1)\lg\frac{1+\zeta_0 e^{i\varphi}}{1+\zeta_0} - \frac{s}{(-\zeta_0)^m},$$

$$a_1 = 0 \text{ (wegen (51))}, \tag{58}$$

---

[1]) Anders geschrieben $= \lg\left(\frac{F_1(1+\zeta_0 e^{i\varphi})}{(1+\zeta_0 e^{i\varphi})^{n+1}} : \frac{F_1(z_0)}{z_0^{n+1}}\right)$.

$$a_2 = (n+1)|\zeta_0|\frac{m+1}{2} e^{i\alpha} : (1+\zeta_0) \tag{59}$$

(wieder mit Rücksicht auf (51)),

$$\Re(a_2) = \frac{(n+1)(m+1)}{2}|\zeta_0| \ (\cos\alpha + O(|\zeta_0|)) < 0 \tag{60}$$

(vgl. (52)),

$$|a_n| = O((n+1)|\zeta_0|) = O(|a_2|) = O(\Re(a_2)) \quad (n \geqq 2). \tag{61}$$

Aus (58), (60) folgt, daß für $\varphi = 0$ die Funktion $\Re(a_1\varphi + a_2\varphi^2 + \cdots)$ und somit auch die Funktion $|exp(a_1\varphi + a_2\varphi^2 + \cdots)|$ ein Maximum besitzt. Um zu zeigen, daß die Funktion

$$\begin{aligned}\Re(a_1\varphi + a_2\varphi^2 + \cdots) = -(n+1)|\zeta_0|\Big(&\frac{1}{m}\cos(\alpha - m\varphi) \\ &+ \cos(\alpha+\varphi) - \frac{m+1}{m}\cos\alpha + O(|\zeta_0|)\Big)\end{aligned} \tag{62}$$

an der Stelle $\varphi = 0$ ihren überhaupt größten Wert annimmt, m. a. W. daß sie sonst < 0 ist, bestimmen wir sämtliche Extrema der Funktion $\Re(a_1\varphi + a_2\varphi^2 + \cdots)$ durch Auflösen der Gleichung $\Re'(a_1\varphi + a_2\varphi^2 + \cdots) = 0$. Da

$$\begin{aligned}\Re'(a_1\varphi + a_2\varphi^2 + \cdots) = -(n+1)|\zeta_0|(&\sin(\alpha - m\varphi) \\ &- \sin(\alpha+\varphi) + O(|\zeta_0|))\end{aligned} \tag{63}$$

ist, muß jede von Null verschiedene Nullstelle der Funktion $\Re(a_1\varphi + a_2\varphi^2 + \cdots)$ näherungsweise entweder gleich

$$\frac{2\varkappa\pi}{m+1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots m) \tag{64}$$

oder, falls $m > 1$,[1])

$$\frac{2\alpha - \pi}{m-1} + \frac{2\lambda\pi}{m-1} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots (m-1)) \text{ sein.} \tag{65}$$

---

[1]) Falls $m = 1$, kommt der Näherungswert $\frac{\pi}{2}$ (statt (65)) in Frage; für ihn wird die rechte Seite von (62) gleich $(n+1)|\zeta_0| (\cos\alpha + O(|\zeta_0|)) < 0$, da ja $\cos\alpha < 0$.

An den Stellen (64) wird

$$66)\qquad \Re(a_1\varphi + a_2\varphi^2 + \cdots)$$
$$= -(n+1)|\zeta_0|\frac{m+1}{m}\left[\cos\left(\alpha + \frac{2\varkappa\pi}{m+1}\right) - \cos\alpha + O(|\zeta_0|)\right]$$
$$< 0$$

auf Grund der Bestimmung von α (s. die Bemerkung vor (52)); an den Stellen (65) aber wird

$$67)\qquad \Re(a_1\varphi + a_2\varphi^2 + \cdots)$$
$$= -(n+1)|\zeta_0|\left[-\frac{m+1}{m}\cos\alpha + \left(1 - \frac{1}{m}\right)\cos(\alpha+\varphi) + O(|\zeta_0|)\right]$$
$$< -(n+1)|\zeta_0|\left[\frac{m+1}{m}\cos\frac{\pi}{m+1} - \left(1 - \frac{1}{m}\right) + \varepsilon_n\right],$$

wo $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$ ist, da ja α so bestimmt wurde, daß $|\cos\alpha|$ $> \cos\frac{\pi}{m+1} + \varepsilon_n$ wurde; nun ist aber für $m = 2$ und um so mehr für größere Werte von m die Differenz $\frac{m+1}{m}\cos\frac{\pi}{m+1}$ $-\left(1 - \frac{1}{m}\right)$ positiv, also der Ausdruck (67) negativ. Da die stetige Funktion $\Re(a_1\varphi + a_2\varphi^2 \ldots)$ an den Stellen (64), (65), die für großes n den Stellen der Extrema der Funktion beliebig nahe liegen, negative Werte annimmt, ist sie stets < 0 außer für $\varphi = 0$. Zugleich ersieht man, daß $exp(a_1\varphi + a_2\varphi^2 + \cdots)$[1]) außer in einer gewissen Umgebung der Stelle $\varphi = 0$ von der Ordnung $O\ (n^{-\omega})$ wird, daß also die Integration über die Kreislinie $|z - 1| = |\zeta_0|$ auf diese Umgebung beschränkt werden darf. Nun schreiben wir die Funktion (56) so:

$$68)\qquad G(\varphi) = e^{a_2\varphi^2}(1 + b_1\varphi + b_2\varphi^2 + b_3\varphi^3 + \cdots);$$

dann wird wegen (58), (61):

---

[1]) Anders geschrieben: $\frac{F_1(1+\zeta_0 e^{i\varphi})}{(1+\zeta_0 e^{i\varphi})^{n+1}} : \frac{F_1(z_0)}{z_0}$.

69) $$b_1 = O(1)^{1)}, \qquad b_2 = O(1),$$

70) $$b_\nu = O\left(|a_2|^{\frac{\nu}{3}}\right) \text{ für } \nu \geqq 3.$$

Den Ausdruck (68) für $G(\varphi)$ setzen wir in (55) ein und integrieren gliedweise zwischen den Grenzen $-\infty$, $+\infty$. Indem wir noch beachten, was sogleich bewiesen werden soll, daß nämlich das Integral über den Kreis $|z| = 1 + |\zeta_0|$ als von der Ordnung $O(n^{-\omega})$ vernachlässigt werden darf, erhalten wir so die gesuchte asymptotische Reihe für den Taylorkoeffizienten C_n der Funktion $F(z)$. Ihr Anfangs- und Hauptglied ist

71) $$\frac{-F(z_0)\zeta_0}{z_0^{n+1}\sqrt{-2\pi(n+1)(m+1)\zeta_0 : z_0}}.$$

Daß das über die Kreislinie $|z| = 1 + |\zeta_0|$ zu erstreckende Integral vernachlässigt werden darf, sieht man so ein:[2]) Sein Wert ist

72) $$exp\left(\frac{|s|}{|\zeta_0|^m}\right)\frac{1}{(1+|\zeta_0|)^{n+1}}|\zeta_0|^{-|l|}(-\lg|\zeta_0|)^{|k|}\cdot O(1)$$

und es ist nur zu zeigen, daß dieser Ausdruck

$= (|F(z_0)| : |z_0|^{n+1})\, O(n^{-\omega})$ ist, oder, was dasselbe, daß

73) $$exp\left(\frac{|s|}{|\zeta_0|^m}\right)\frac{1}{(1+|\zeta_0|)^{n+1}} : \frac{|F_1(z_0)|}{|z_0|^{n+1}} = O(n^{-\omega})$$

ist. Nun gibt es aber einen Wert φ_1 im Intervall $0 \ldots 2\pi$ (für $m > 1$ sogar mehr als einen), für den der Wert des Ausdrucks (57) gleich

74) $$\frac{|s|}{|\zeta_0|^m} - (n+1)\lg\frac{1+\zeta_0 e^{i\varphi_1}}{1+\zeta_0} - \frac{s}{(-\zeta_0)^m}$$

---

[1]) Auf die Koeffizienten $b_1, b_3, b_5, \ldots$ kommt es übrigens gar nicht an, da sie bei der gliedweisen Integration von (68) zwischen den Grenzen $-\infty$, $+\infty$ doch wegfallen.

[2]) Ist $F(z)$ eindeutig ($k = 0$, l ganzzahlig), so ist dieses Integral von einem gewissen n ab sogar genau gleich Null; denn dann kann es, ohne seinen Wert zu ändern, auch über die Kreislinie $|z| = R$ mit beliebig großem R erstreckt werden.

wird. Nach dem vorhin Bewiesenen ist, außer wenn φ_1 in einer mit $\frac{1}{n}$ beliebig kleinen Umgebung der Stelle $\varphi = 0$ liegt,

$$75)\quad \frac{F_1(1+\zeta_0 e^{i\varphi_1})}{(1+\zeta_0 e^{i\varphi_1})^{n+1}} : \frac{F(z_0)}{z_0^{n+1}}, \text{ d. h. } \frac{exp\frac{s|}{|\zeta_0|^m}}{(1+\zeta_0 e^{\varphi_1})^{n+1}} : \frac{F(z_0)}{z_0^{n+1}} = O(n^{-\omega}),$$

woraus dann um so mehr das Bestehen von (73) folgt. Liegt aber φ_1 sehr nahe der Null, so kann der Ausdruck (75) $O(1)$ werden; dann ist aber der Realteil von $\zeta_0 e^{i\varphi_1}$ negativ und daher

$$76)\quad \frac{(1+\zeta_0 e^{i\varphi_1})^{n+1})}{(1+|\zeta_0|)^{n+1}} = O(n^{-\omega}),$$

und es folgt (73) durch Multiplikation aus (76) und (75), nachdem in letzterer Gleichung $O(n^{-\omega})$ auf der rechten Seite durch $O(1)$ ersetzt worden ist.

Im Falle $m = 1$ würde es genügen, statt (51) die einfachere Gleichung

$$77)\quad \zeta^2 = \frac{s}{n+1} \quad \left(\text{oder auch } = \frac{s}{n}\right)$$

aufzulösen; es würde dann zwar die Konstante $a_1 \neq 0$ werden, aber man könnte den Faktor $exp(a_1\varphi)$ als durch die Reihe $1 + b_1\varphi + b_2\varphi^2 + \cdots$ mitdargestellt betrachten. Ähnlich könnte man sich im Falle $m = z$ mit der Auflösung der Gleichung

$$-\zeta^3 = \frac{s}{n+1}$$

begnügen; doch würde man jetzt den Faktor $exp(a_1\varphi)$ nicht in die Reihe $1 + b_1\varphi + b_2\varphi^2 + \cdots$ eingehen lassen, sondern sich der Formel (20) bedienen.

Wir haben den Fall eines reellen negativen s zurückgestellt; ist $s = -|s|$ und zugleich $m > 1$, so hat die Gleichung (50) zwei Wurzeln $z_0 = 1 + \zeta_0$ und $z_1 = 1 + \zeta_1$ von ungefähr gleichem möglichst kleinem und daher sicher negativem Realteil; man wird dann die Umgebungen beider berück-

sichtigen und auf der rechten Seite von (71) tritt einfach noch ein zweiter Summand hinzu, der von z_1 so wie der erste von z_0 abhängt.

Ist aber s reell negativ und zugleich $m = 1$, so kann man sich wieder mit der Auflösung der Gleichung (77) begnügen, deren Wurzeln

$$78) \qquad \zeta_0 = i\sqrt{\frac{|s|}{n+1}} \text{ und } \zeta_1 = -i\sqrt{\frac{|s|}{n+1}}$$

sind. Nun aber wird a_2 sowohl für die Stelle ζ_0 als auch für die Stelle ζ_1 für $n \to \infty$ mit beliebiger Annäherung rein imaginär, und die für unsere Überlegungen wesentliche Bedingung (12) ist nicht mehr erfüllt. Diese Schwierigkeit ist durch Abänderung des Integrationswegs leicht zu umgehen. Das Endergebnis wird freilich das nämliche sein, als hätte man über die Umgebungen der Stellen ζ_0, ζ_1 auf der Kreislinie $|1-z| = |\zeta_0|$ integriert[1]) und die Formel (18) ohne das Erfülltsein der Bedingung (12) benutzt. Da man auch im Falle $m = 1$ und eines beliebigen s stets über die Umgebungen beider Nullstellen der Gleichung (77) auf dem Kreise $|1-z| = |\zeta_0|$ integrieren darf, erhält man schließlich e i n e Formel, die für alle s richtig ist; entsprechendes gilt auch im Falle $m > 1$.

Die erwähnte Abänderung des Integrationswegs besteht in folgendem: der neue Weg setzt sich, wenn zur Abkürzung

$$\sqrt{\frac{|s|}{n+1}} = \varepsilon$$

gesetzt wird, zusammen:

1. aus der den Punkt $1-\varepsilon$ mit dem Punkte $1-\varepsilon+(1+i)\,2\,\varepsilon$ verbindenden Strecke, deren Mittelpunkt $1+\varepsilon i$ ist;

[1]) Die folgende Darstellung entspricht allerdings nicht einer Integration über die Umgebungen der Punkte ζ_0, ζ_1 auf der Kreislinie $|1-z| = |\zeta_0|$, sondern auf den Tangenten an diese Kreislinie; doch ist das ein ganz unerheblicher und leicht zu vermeidender Unterschied, der seinen Grund nur in der großen dem Verfahren anhaftenden Freiheit hat.

2. aus dem Kreisbogen um O, der die Punkte $1 - \varepsilon + (1 + i)\, 2\, \varepsilon$ und $(1 - \varepsilon) + (1 - i)\, 2\, \varepsilon$ miteinander verbindet und zu dem ein Zentriwinkel $> \pi$ gehört;

3. aus der den Punkt $1 - \varepsilon + (1 - i)\, 2\, \varepsilon$ mit dem Punkte $1 - \varepsilon$ verbindenden Strecke, deren Mittelpunkt $1 - \varepsilon i$ ist.

Das Integral über das zweite Stück des Integrationswegs kann genau wie vorhin das Integral über die Kretslinie $|z| = 1 + |\zeta_0|$ vernachlässigt werden.

Um das Integral über das erste Stück auszuführen, setzen wir

$$79) \quad z = 1 + \varepsilon i + (1 + i)\, \varepsilon t, \text{ also } \zeta = \varepsilon t + i \varepsilon (1 + t)$$

und erhalten so ein Integral mit der reellen Veränderlichen t und den Grenzen -1, $+1$. Man überzeugt sich leicht, daß man von diesem Integral nur die Umgebung der Stelle $t = 0$ beizubehalten braucht. Schließlich erhält man, wenn man bei gliedweiser Integration die Grenzen auf $-\infty$, $+\infty$ ausdehnt, einen Ausdruck genau wie zuvor und einen ganz entsprechenden liefert vom dritten Stück des Integrationswegs her die Umgebung der Stelle $\zeta_1 = -\varepsilon i$.

Transformation des rechtwinkligen Koordinatensystems.

Von A. Voss.

Vorgetragen in der Sitzung am 9. Dezember 1922.

Die in der Überschrift genannte elementare Frage ist längst eingehend behandelt, jedoch auch neuerdings wieder untersucht worden.[1]) Seit einer Reihe von Jahren habe ich in Vorlesungen über Raumgeometrie darauf aufmerksam gemacht, daß mittels einer etwas anderen Darstellung dieser Gegenstand einfacher und namentlich in Bezug auf den Drehungswinkel übersichtlicher dargelegt werden kann (vgl. namentlich § III des folgenden).

§ I. Die Gleichung dritten Grades.

Die Formeln für den Übergang von dem rechtwinkligen System, dem Triëder XYZ zum Triëder $X_1 Y_1 Z_1$ entnimmt man aus dem Schema von Lamé

$$\begin{array}{cccc} & x & y & z \\ x_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ y_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ z_1 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3, \end{array}$$

[1]) Vgl. z. B. Klein und Sommerfeld, Theorie des Kreisels, Leipzig 1897, S. 15 ff.; Salmon Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes, 5. Auflage, herausgegeben von K. Kommerell unter Mitwirkung von v. Brill, Leipzig 1922, erste Lieferung, S. 54—63. Vgl. auch die Note von G. Darboux, Nouvelle démonstration des formules d'Euler in den leçons de cinématique von G. Koenigs, Paris 1897, S. 343.

in dem die α_i, β_i, γ_i die Richtungscosinus der neuen Axen x gegen die alten sind. Dabei bestehen die Gleichungen

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1$$
$$\alpha_i \alpha_k + \beta_i \beta_k + \gamma_i \gamma_k = 0, \qquad i \neq k,$$

aus denen die weiteren Relationen mit Hilfe der Identität

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

folgen. Das Quadrat der Determinante Δ der Richtungscosinus ist gleich eins; sind die beiden Triëder gleich orientiert, so daß $X_1 Y_1 Z_1$ durch Bewegung in das Triëder XYZ übergeführt werden kann, so ist $\Delta = +1$, im entgegengesetzten Falle gleich -1. Im ersten Falle ist jedes Element von Δ gleich seiner Unterdeterminante im Laméschen Schema, im zweiten ist es ihr entgegengesetzt gleich.[1])

Hieran schließt sich die Bestimmung der bei der Transformation invarianten Richtungen

$$x_1 = \lambda x, \qquad y_1 = \lambda y, \qquad z_1 = \lambda z,$$

welche den Gleichungen

$$1) \qquad \begin{aligned} \lambda x &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ \lambda y &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\ \lambda z &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z \end{aligned}$$

genügen müssen, d. h. der Gleichung dritten Grades

---

[1]) Werden Minimalrichtungen für die Axen des Triëders $X_1 Y_1 Z_1$ ausgeschlossen, so gelten die Formeln für die α, β, γ auch bei komplexen Werten derselben. Will man die Gesamtheit der Relationen zwischen den Elementen und ihren zugehörigen Unterdeterminanten erhalten, so bilde man die Identität

$$\Delta \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & u_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & u_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{vmatrix}$$

und vergleiche auf beiden Seiten die entsprechenden Koeffizienten der $u_i v_k$. Im folgenden werden übrigens nur reelle Werte der α, β, γ vorausgesetzt, da sonst weitere Unterscheidungen nötig werden.

2) $$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 - \lambda & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 - \lambda & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

während aus 1) noch folgt

3) $$\lambda^2 (x^2 + y^2 + z^2) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Die bekannten Identitäten (je nachdem $\Delta = \pm 1$)

$$\begin{array}{lll} \pm \alpha_1 = \beta_2 \gamma_3 - \gamma_2 \beta_3, & \pm \beta_1 = \gamma_2 \alpha_3 - \alpha_2 \gamma_3, & \pm \gamma_1 = \alpha_2 \beta_3 - \beta_2 \alpha_3 \\ \pm \alpha_2 = \gamma_1 \beta_3 - \beta_1 \gamma_3, & \pm \beta_2 = \alpha_1 \gamma_3 - \gamma_1 \alpha_3, & \pm \gamma_2 = \beta_1 \alpha_3 - \alpha_1 \beta_3 \\ \pm \alpha_3 = \beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2, & \pm \beta_3 = \gamma_1 \alpha_2 - \alpha_1 \gamma_2, & \pm \gamma_3 = \alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2 \end{array}$$

dienen nun zur Entwicklung der Gleichung 2).

Man erhält zunächst

$$\begin{aligned} \Lambda = \Delta - \lambda^3 - \lambda (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_1 \gamma_3) + \lambda^2 (\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) \\ - \lambda (\beta_2 \gamma_3 - \gamma_2 \beta_3) + \lambda (\beta_1 \alpha_2 + \gamma_1 \alpha_3), \end{aligned}$$

oder, wenn man

$$\begin{aligned} \beta_2 \gamma_3 &= \gamma_2 \beta_3 \pm \alpha_1 \\ \gamma_1 \alpha_3 &= \alpha_1 \gamma_3 \pm \beta_2 \\ \alpha_2 \beta_1 &= \alpha_1 \beta_2 \pm \gamma_3 \end{aligned}$$

setzt, mittels des Ausdruckes

4) $$\Omega = \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3,$$

der als Charakteristik der Determinante Δ bezeichnet werde, die Gleichung

I $$\lambda^3 - \lambda^2 \Omega \pm \lambda \Omega - \Delta = 0,$$

in der die oberen (unteren) Vorzeichen dem Falle $\Delta = \pm 1$ entsprechen. Für $\Delta = +1$ hat daher Λ die Wurzel $\lambda = +1$, für $\Delta = -1$ aber $\lambda = -1$, so daß die beiden anderen Wurzeln durch die reciproken Gleichungen

Ia $$\lambda^2 + \lambda (1 - \Omega) + 1 = 0$$

Ib $$\lambda^2 - \lambda (1 + \Omega) + 1 = 0$$

in der Form

$$2\lambda_1 = -(1-\Omega) \pm \sqrt{(1-\Omega)^2 - 4}$$
$$2\lambda_2 = +(1+\Omega) \pm \sqrt{(1+\Omega)^2 - 4}$$

gegeben sind.

Aus 3) folgt noch: Ist $\lambda \neq \pm 1$, so muß $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ sein. Dann sind aber die x, y, z notwendig imaginär, also auch die betreffenden Werte des λ selbst.

Für $\Delta = +1$ ist $\lambda = +1$ niemals Doppelwurzel, denn $\Delta = f(\lambda)$ gibt für diesen Fall

$$f'(1) = 3 - \Omega.$$

Dies kann aber nur verschwinden, wenn $\alpha_1 = 0$, $\beta_2 = 1$, $\gamma_3 = 1$ ist, d. h. wenn eine von der Identität verschiedene Transformation gar nicht vorliegt. Soll dagegen in diesem Falle $\Delta = +1$, $\lambda = -1$ Wurzel sein, so ist sie immer zugleich Doppelwurzel; mutatis mutandis gelten dieselben Angaben für $\Delta = -1$.[1]) Im allgemeinen erhält man also neben einer reell invarianten Geraden zwei Minimalrichtungen; für den Fall $\Delta = +1$ hat die reelle Gerade die Bedeutung der Drehungsaxe. Aber in einem besonderen Falle können die beiden Minimalrichtungen auch ganz in Wegfall kommen, was vielleicht bisher nicht bemerkt worden ist. Sie vereinigen sich dabei etwa nicht zu einer einzigen Minimalrichtung, was ja auch an und für sich unmöglich sein würde, sondern ergeben nur eine einzige reell-invariante Gerade.

Dieser Fall entspricht bei $\Delta = +1$ dem Werte $\Omega = -1$. Zunächst hat man für $\lambda = +1$ die bekannte Lösung von

$$x(\alpha_1 - 1) + y\beta_1 + z\gamma_1 = 0$$
$$x\alpha_2 + y(\beta_2 - 1) + z\gamma_2 = 0$$
$$x\alpha_3 + y\beta_3 + z(\gamma_3 - 1) = 0,$$

[1]) Dies entspricht dem (vgl. Göttinger Nachrichten 1887, S. 430) von mir bereits 1878 in den Mathematischen Annalen, Bd. XIII bewiesenen, bei allen orthogonalen Substitutionen gültigen Satze, vgl. auch die spätere Note von Stieltjes in den Acta mathematica, Bd. VI, 1886.

die auf
$$x : y : z = \gamma_2 - \beta_3 : \alpha_3 - \gamma_1 : \beta_1 - \alpha_2$$
führt. Ist aber auch $\lambda = -1$ Wurzel, so hat man für die entsprechende Richtung ξ, η, ζ
$$\xi(\alpha_1 + 1) + \eta\beta_1 + \zeta\gamma_1 = 0$$
$$\xi\alpha_2 + \eta(\beta_2 + 1) + \zeta\gamma_2 = 0$$
$$\xi\alpha_3 + \eta\beta_3 + \zeta(\gamma_3 + 1) = 0,$$
woraus durch Multiplikation mit den α_1, α_2, α_3 usw. und Addition
$$\xi(\alpha_1 + 1) + \eta\alpha_2 + \zeta\alpha_3 = 0$$
$$\xi\beta_1 + \eta(\beta_2 + 1) + \zeta\beta_3 = 0$$
$$\xi\gamma_1 + \eta\gamma_2 + \zeta(\gamma_3 + 1) = 0,$$
also nun durch Subtraktion
$$\eta(\beta_1 - \alpha_2) + (\gamma_1 - \alpha_3)\zeta = 0$$
$$\xi(\alpha_2 - \beta_1) + (\gamma_2 - \beta_3)\zeta = 0$$
$$\xi(\alpha_3 - \gamma_1) + \eta(\beta_3 - \gamma_2) = 0,$$
also wieder
$$\xi : \eta : \zeta = \gamma_2 - \beta_3 : \alpha_3 - \gamma_1 : \beta_1 - \alpha_2$$
entsteht.[1])

§ II. Der Drehungswinkel.

Zur Bestimmung des Drehungswinkels um die reell invariante Gerade $\Delta = +1$ soll hier eine Formel von Darboux[2]) benutzt werden, obwohl sie der Natur der Sache nach nur den absoluten Wert von $\operatorname{tg} \Theta/2$ desselben liefern kann, die ich hier in etwas anderer Form ableite: Sind A, B, C die Cosinus einer Drehungsaxe, x, y, z die Koordinaten irgend eines Raumpunktes P, der durch die Drehung Θ in der Uhrzeigerbewegung in $P_1(x_1, y_1, z_1)$ verwandelt wird, ferner Q der Fußpunkt,

[1]) Die vollständige Diskussion der Ausnahmefälle, die für das folgende nicht in Betracht kommt, mag hier der Kürze halber unterbleiben.

[2]) Siehe die Anmerkung 1) zu § II.

der von P und P_1 auf die Drehaxe gezogenen Senkrechten, so schneiden sich die in P und P' auf QP und QP' und zur Richtung A, B, C senkrecht gezogenen Geraden in einem Punkte R mit den Koordinaten X, Y, Z. Ist O der Anfang der Koordinaten und $OQ = p$, so sind die Richtungen von $QP = l$ durch die drei Cosinus[1])

$$\frac{x - pA}{l}, \quad \frac{y - pB}{l}, \quad \frac{z - pC}{l}$$

gegeben. Nennt man sie λ, μ, ν, so ist

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0$$
$$\lambda A + \mu B + \nu C = 0,$$

also

$$l\lambda = Bz - Cy$$
$$l\mu = Cx - Az$$
$$l\nu = Ay - Bz$$

mit $l^2 = r^2 - p^2$, falls $OP = OP'$ durch r bezeichnet wird. Darnach hat man

$$X = x + \operatorname{tg}(\Theta/2)(Bz - Cy)$$
$$Y = y + \operatorname{tg}(\Theta/2)(Cx - Az)$$
$$Z = z + \operatorname{tg}(\Theta/2)(Ay - Bx),$$

für die Drehung $-\Theta/2$ aber, die den Punkt P' in R verwandelt

$$X = x_1 - \operatorname{tg}(\Theta/2)(Bz_1 - Cy_1)$$
$$Y = y_1 - \operatorname{tg}(\Theta/2)(Cx_1 - Az_1)$$
$$Z = z_1 - \operatorname{tg})\Theta/2)(Ay_1 - Bx_1),$$

so daß die Identitäten bestehen:

$$\text{I)} \quad \begin{aligned} x + \operatorname{tg}(\Theta/2)(Bz - Cy) &= x_1 - \operatorname{tg}(\Theta/2)(Bz_1 - Cy_1) \\ y + \operatorname{tg}(\Theta/2)(Cx - Az) &= y_1 - \operatorname{tg}(\Theta/2)(Cx_1 - Az_1) \\ z + \operatorname{tg}(\Theta/2)(Ay - Bx) &= z_1 - \operatorname{tg}(\Theta/2)(Ay_1 - Bx_1) \end{aligned}$$

[1]) Durch eine Figur, auf die hier natürlich verzichtet werden mußte, hätte sich die Beschreibung viel kürzer darstellen lassen.

für alle korrespondierenden $x\,y\,z$; $x_1\,y_1\,z_1$,[1]) d. h. sie finden statt, falls durch Uhrzeigerbewegung um die Drehaxe P der Punkt P' entsteht.

Die Identitäten I kann man nun zur Bestimmung von $\operatorname{tg}(\Theta/2)$ durch irgend welche korrespondierende P, P_1 verwenden; wählt man P im Abstande $+1$ auf der X-Axe, so ist nach § I

$$x_1 = a_1, \quad y_1 = a_2, \quad z_1 = a_3,$$

so daß

$$\begin{aligned} 1 &= a_1 - \operatorname{tg}(\Theta/2)\,(B a_3 - C a_2) \\ C \operatorname{tg}(\Theta/2) &= a_2 - \operatorname{tg}(\Theta/2)\,(C a_1 - A a_3) \\ -B \operatorname{tg}(\Theta/2) &= a_3 - \operatorname{tg}(\Theta/2)\,(A a_2 - B a_1), \end{aligned} \tag{1}$$

während

$$\begin{aligned} A &= k(\gamma_2 - \beta_3) \\ B &= k(a_3 - \gamma_1) \\ C &= k(\beta_1 - a_2) \end{aligned} \tag{2}$$

zu setzen, aber das Vorzeichen von k unbekannt ist. Wählt man die erste der Gleichungen 1), so folgt für $\Delta = +1$

$$\begin{aligned} 1 - a_1 &= -\operatorname{tg}(\Theta/2)\,k\,(a_3 - \gamma_1)\,a_3 - (\beta_1 - a_2)\,a_2) \\ &= -\operatorname{tg}(\Theta/2)\,k\,\{1 - a_1^2 - \gamma_1\,(a_3 - \beta_1 a_2)\} \\ &= -\operatorname{tg}(\Theta/2)\,k\,\{1 - a_1^2 - a_1\gamma_3 + \gamma_3 - a_1\beta_2 + \beta_2), \end{aligned}$$

also, wenn man den Faktor $1 - a_1$ auf beiden Seiten fort läßt

$$\operatorname{tg}(\Theta/2) = -\frac{1}{k}(1 + \Omega).$$

Zur Berechnung von k^2 aber hat man nach 2) die Gleichung

$$k^2\{(\gamma_2 - \beta_3)^2 + (a_3 - \gamma_1)^2 + (\beta_1 - a_2)^2\} = 1. \tag{3}$$

[1]) Daß die Determinante

$$\frac{1}{l^2}\begin{vmatrix} A & B & C \\ x - pA & y - pB & z - pC \\ Bz - Cy & Cx - Az & Ay - Bx \end{vmatrix}$$

den Wert $+1$ hat, erkennt man, wenn es erforderlich sein sollte, durch direkte Ausrechnung z. B.

Setzt man nun

$$w^2 = (\gamma_2 - \beta_3)^2 + (\alpha_3 - \gamma_1)^2 + (\beta_1 - \alpha_2)^2,$$

so ergibt sich

$$w^2 = 3 - (\alpha_1^2 + \beta_2^2 + \gamma_3^2) - 2\gamma_2\beta_3 - 2\alpha_3\gamma_1 - 2\beta_1\alpha_2,$$

was sich durch die Transformation der Unterdeterminanten, die hier beständig anzuwenden ist, in

$$4)\qquad \begin{aligned} w^2 &= 3 - (\alpha_1^2 + \beta_2^2 + \gamma_3^2) + 2(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) \\ &= 4 - (1 - \Omega)^2 = (3 - \Omega)(1 + \Omega) \end{aligned}$$

verwandelt. Hiernach ist

$$\text{II)}\qquad \operatorname{tg}(\Theta/2) = -\frac{1}{k}\sqrt{\frac{3 - \Omega}{1 + \Omega}},$$

also bis auf das Vorzeichen von k wieder nur von der Charakteristik der Richtungscosinus abhängig.

Würde man an Stelle der ersten Gleichung 1) eine der beiden anderen wählen, so würde beiderseits der Faktor α_2, resp. α_3, oder bei allen den 6 Fällen, wo P im Abstande $+1$ auf die Y, resp. Z-Axe legt, immer der betreffende Cosinusfaktor durch Division herausfallen.[1])

§ III. Direkte Bestimmung von tg Θ.

Um endlich, ohne bereits die Formeln von Euler oder Cayley für orthogonale Substitutionen oder irgend eine andere, wie die in § II benutzte, die sich allerdings durch Einfach-

---

[1]) Wählt man an Stelle der A, B, C die bekannten Ausdrücke

$$\begin{aligned} k_1 A_1 &= 1 + \alpha_1 - (\beta_2 + \gamma_3) \\ k_1 B_1 &= \alpha_2 + \beta_1 \\ k_1 C_1 &= \alpha_3 + \gamma_1 \end{aligned}$$

nebst den analogen, so folgt

$$k_1^2 = (1 + \alpha_1 - (\beta_2 + \gamma_3))\,(3 - \Omega),$$

so daß

$$\begin{aligned} 1 + \alpha_1 - (\beta_2 + \gamma_3) &\geqq 0 \\ 1 + \gamma_3 - (\alpha_2 + \beta_2) &\geqq 0 \\ 1 + \beta_2 - (\gamma_3 + \alpha_1) &\geqq 0 \end{aligned}$$

sein muß, was übrigens schon im § 1 angedeutet ist.

heit empfiehlt, vorauszusetzen, den Wert von $\operatorname{tg}\Theta$ mit seinem Vorzeichen zu bestimmen, betrachte man neben den beiden Triëdern X, Y, Z; X_1, Y_1, Z_1 noch ein drittes Ξ, H, Z, dessen Axe Z die Richtungscosinus

$$1)\qquad \begin{aligned} A &= k(\gamma_2 - \beta_3) \\ B &= k(\alpha_3 - \gamma_1) \\ C &= k(\beta_1 - \alpha_2) \end{aligned}$$

hat, während k eine positive Zahl sein soll, so daß dann die Orientierung von Z völlig bestimmt ist. Alsdann führe man die Axe H senkrecht zur X-Axe und zur Richtung 1) und wähle die Axe Ξ so, daß das Triëder $\Xi\, H\, Z$ ebenso orientiert ist wie $x\, y\, z$. Sind nun die Richtungscosinus der Axen $\Xi\, H\, Z$ der Reihe nach ξ, η, ζ: o, μ, ν; A, B, C, so ist

$$2)\qquad \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ o & \mu & \nu \\ A & B & C \end{vmatrix} = +1.$$

Jetzt projiziere man den Punkt P, der auf x den Abstand $+1$ hat, auf das Triëder $\Xi\, H\, Z$; seine Koordinaten werden dann u, v, w, wobei $u = \xi$, $v = 0$, $w = A$ wird. Die 3 Koordinaten des Punktes P im System X_1, Y_1, Z_1, welche durch die Drehung wieder in das System $X\, Y\, Z$ geführt sind, seien ebenfalls in dem Triëder $\Xi\, H\, Z$ mit u_1, v_1, w_1 bezeichnet. Dann ist

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta \\ v_1 &= \alpha_2 \mu + \alpha_3 \nu \\ w_1 &= A, \end{aligned}$$

und es ist

$$3)\qquad \operatorname{tg}\Theta = \frac{v_1}{u_1}.$$

Nach der Voraussetzung über die Richtung von H ist

$$\mu B + \nu C = 0, \qquad \mu = \sigma C, \qquad \nu = -\sigma B;$$

nach dem Schema 2)

$$u_1 = \alpha_1(\mu C - \nu B) + \alpha_2 \nu A - \alpha_3 \mu A = \sigma(\alpha_1 - A^2).$$

Hieraus folgt nach 1)

$$u_1 = k^2 \sigma [\alpha_1 \{(\gamma_2 - \beta_3)^2 + (\alpha_3 - \gamma_1)^2 + (\beta_1 - \alpha_2)^2\} - (\gamma_2 - \beta_3)^2]$$

$$u_1 = k^2 \sigma [(\alpha_1 - 1)((\gamma_2 - \beta_3)^2 + \alpha_1 (\alpha_3 - \gamma_1)^2 + (\beta_1 - \alpha_2)^2) + (\alpha_3 - \gamma_1)^2 + (\beta_1 - \alpha_2)^2].$$

Es ist aber

$$(\alpha_3 - \gamma_1)^2 + (\beta_1 - \alpha_2)^2 = 2[1 - \alpha_1 - 2\alpha_1\gamma_3 - 2\alpha_1\beta_2 + 2\beta_2 + 2\gamma_3 = 2(1-\alpha_1)(1+\Omega).$$

Wird nun aus § II, 4 der Wert von w^2 in u_1 eingesetzt, so erhält man

$$u_1 = (\alpha_1 - 1) k^2 \sigma (1 - \Omega)(1 + \Omega).$$

Für $v_1 = \sigma k (\alpha_2 (\beta_1 - \alpha_2) - \alpha_3 (\alpha_3 - \gamma_1)) = \sigma k (\alpha_1^2 - 1 + \alpha_1 \beta_2 - \gamma_3 + \alpha_1 \gamma_3 - \beta_2)$

erhält man

$$v_1 = (\alpha_1 - 1)(1 + \Omega),$$

so daß

$$\frac{v_1}{u_1} = \operatorname{tg} \Theta = \frac{1}{k} \frac{1}{1 - \Omega} = \frac{\sqrt{1+\Omega} \cdot \sqrt{3-\Omega}}{1-\Omega}$$

wird, so daß Übereinstimmung mit dem früher gefundenen Werte von $\operatorname{tg} \Theta/2$ bis auf das Vorzeichen jedesmal durch den positiven Wurzelwert von k vorhanden ist. Für alle Systeme gleichen Wertes von Ω ist also auch der Drehungswinkel derselbe.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1922. Heft I

Januar- bis Märzsitzung

München 1922
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)





Inhalt.

Akademische Buchdruckerei F. Straub in München.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

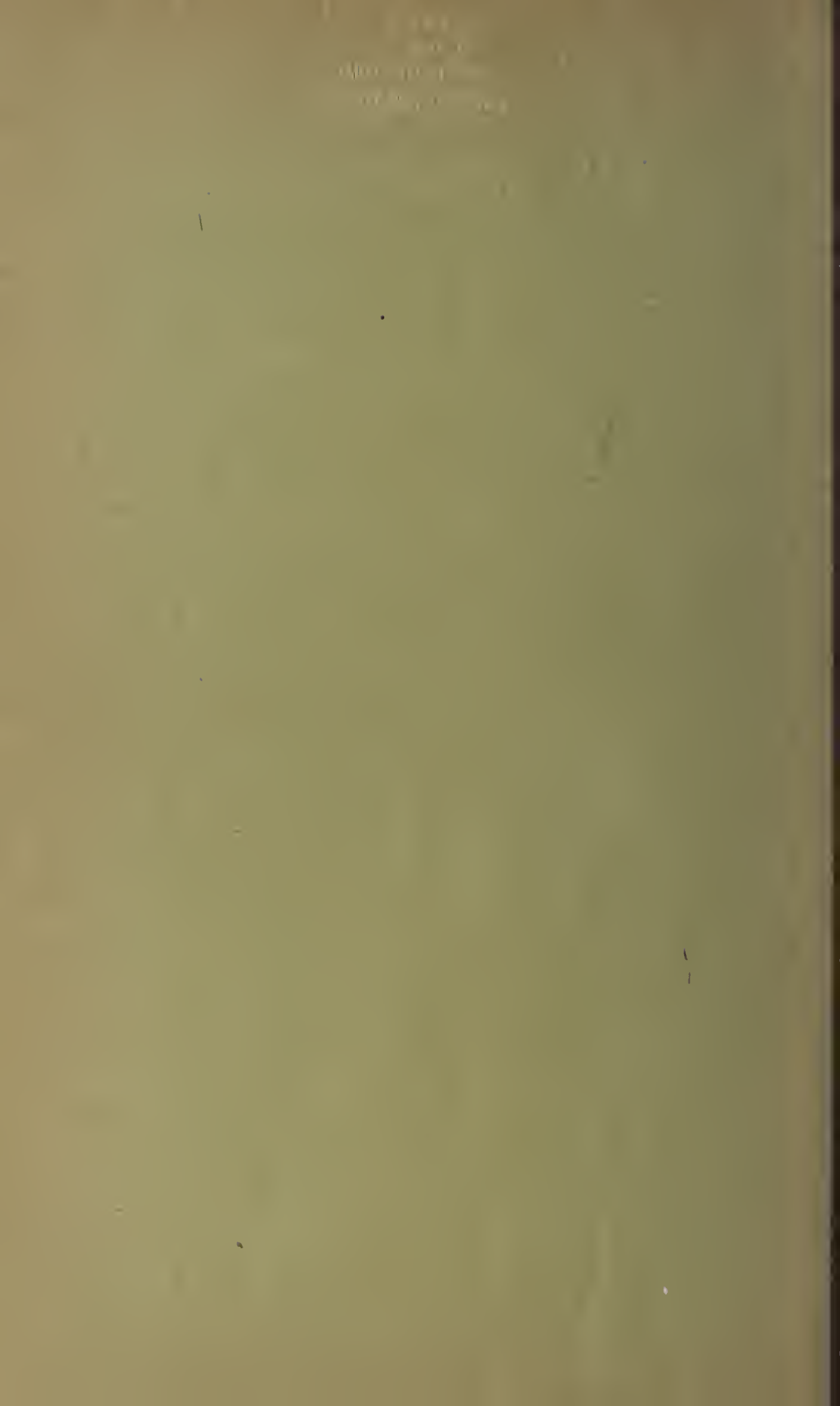
der

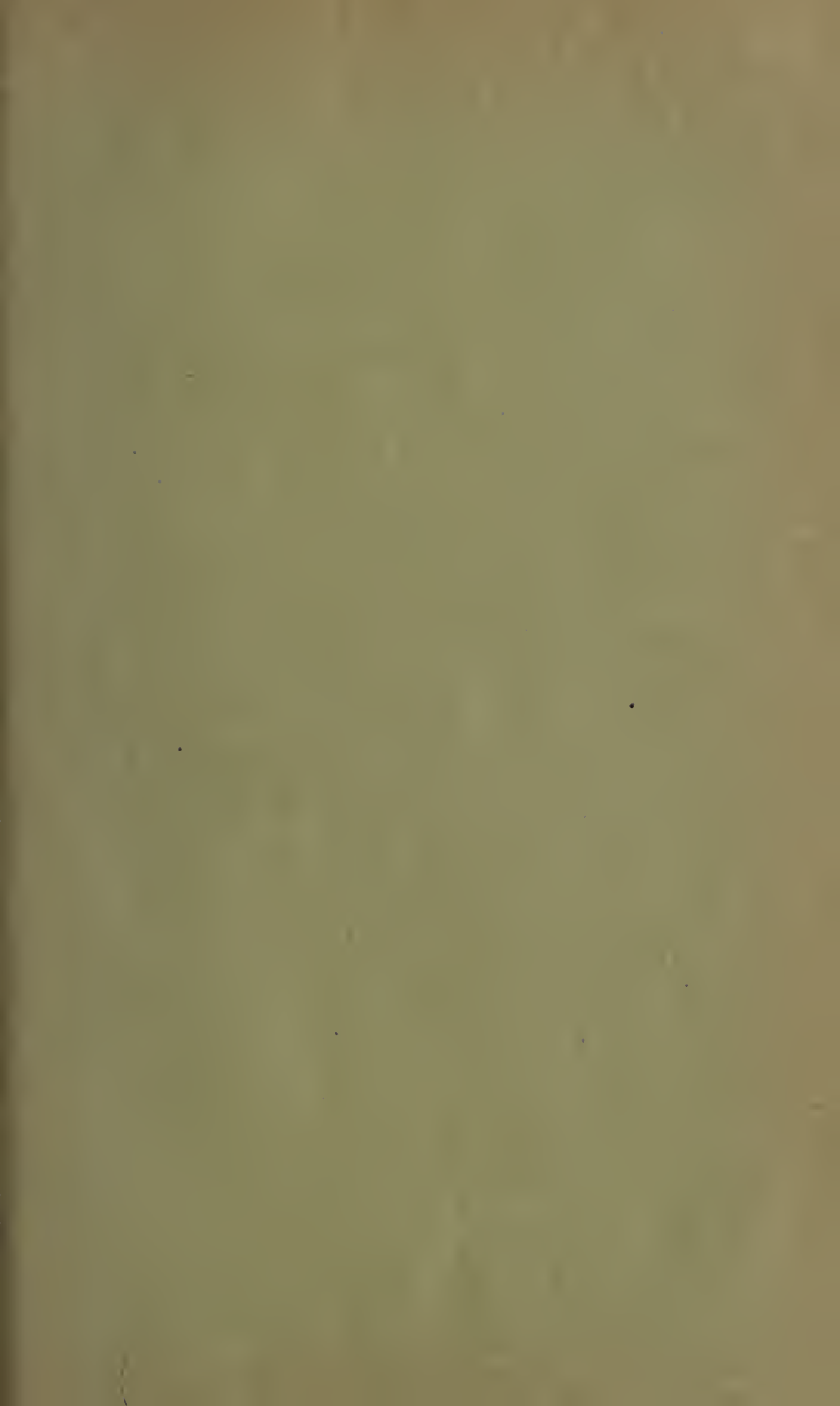
Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1922. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1922
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)





Inhalt.

Akademische Buchdruckerei F. Straub in München.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1922. Heft III

November- und Dezembersitzung

München 1923

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)





Inhalt.

Seite

Abhandlungen.

Akademische Buchdruckerei F. Straub in München.



